

FABRY-PEROT-Etalon

Christopher Bronner, Frank Essenberger
Freie Universität Berlin

19. September 2006

1 Physikalische Grundlagen

Einzel- u. Doppelspalt erzeugen durch Phasengleichheit der wenigen beteiligten Elementarwellen ein Beugungsbild mit relativ breiten Maxima. Beugungsobjekte mit periodischer Struktur führen dagegen zu Vielstrahlinterferenz und so zu scharfen, durch breite dunkle Zonen getrennte Maxima und bieten somit die Möglichkeit hoher Auflösungen in Wellenlängenspektren.

Der FABRY-PEROT-Etalon ist ein optischer Resonator, bei dem das einfallende Licht in viele kohärente Teilstrahlen zerlegt wird. Zwischen zwei planparallelen teilverspiegelten Ebenen wird der Lichtstrahl immer wieder reflektiert, sodass die austretenden Strahlen zu einer Vielstrahlinterferenz hoher Interferenzordnung führen.

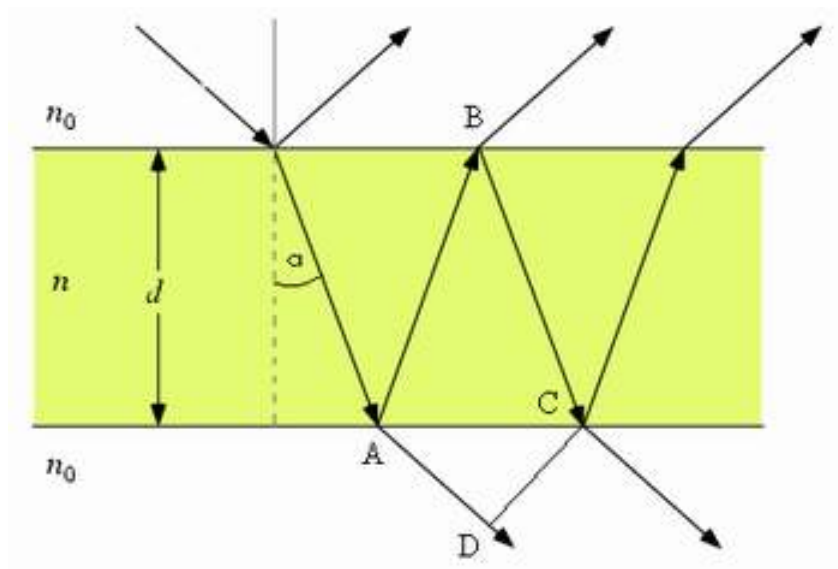


Abbildung 1: Funktionsweise eines FPE

Dabei kann die Brechung an den Grenzflächen unberücksichtigt bleiben, da sie das Muster nur verschiebt, aber keinen Einfluss auf seine Größe hat. Ebenso kann der Phasensprung bei der Reflexion an den Grenzflächen vergessen werden, da er nur ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge sein kann.

Aus geometrischen Überlegungen in der obigen Zeichnung erhält man den Gangunterschied zwischen zwei Teilstrahlen

$$\delta = 2d \cos \alpha \quad (1)$$

Um eine konstruktive Interferenz zu erhalten, muss die Interferenzbedingung

$$2d \cos \alpha = z\lambda \quad (2)$$

erfüllt sein. Dieses Interferometer bietet wegen der hohen Interferenzordnung eine besonders gute Auflösung. Der freie Spektralbereich $\Delta\lambda$ ist bei gleicher Ordnung die Wellenlängendifferenz zwischen zwei Maxima. Er ergibt sich aus der Interferenzbedingung zu

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{z} \quad (3)$$

Um das FABRY-PEROT-Etalon als Spektrometer auszunutzen, bestrahlt man den Etalon mit parallelem, monochromatischem Licht und bildet das Interferenzbild mit einer Sammellinse auf ein Okular ab. Wegen der Symmetrie des Etalons (rotationssymmetrisch um die optische Achse) bilden sich konzentrische Ringe als Beugungsbild. Für den Winkel α ergibt sich aus dem Radius dieser Ringe r im Okular und dem Okularabstand f (der i.d.R. der Brennweite der Objektivlinse entsprechen sollte, damit das Beugungsbild scharf wird) die Beziehung

$$\alpha = \frac{r}{f} \quad (4)$$

Mit der Reihenentwicklung des Cosinus erhält man aus Gl. (1)

$$z = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{r^2}{2f^2} \right) \quad (5)$$

Durch messen zweier Ringe und Festlegung ihrer Ordnung i als vom innersten Ring aus gemessen kann die Ordnung z eliminiert werden, indem man Gl. (5) und

$$z + i = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \frac{r_i^2}{2f^2} \right) \quad (6)$$

ineinander einsetzt. Nach d aufgelöst erhält man einen Zusammenhang zwischen messbaren Größen, Wellenlänge und der Dicke des Etalons.

$$d = i \frac{\lambda f^2}{r_i^2 - r_0^2} \quad (7)$$

Hieraus kann bei bekannter Wellenlänge die Dicke bestimmt werden.
Zur relativen Wellenlängenbestimmung genügt es, zwei Radien zu messen:

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda}{2f^2}(r^2 - r'^2) \quad (8)$$

Die Intensitätsverteilung um die Maxima wird in der AIRY-Formel

$$\frac{I}{I_0} = \left[\frac{T}{1-R} \right]^2 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\phi\pi)} \quad (9)$$

und daraus näherungsweise durch

$$2\Delta z = \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \quad (10)$$

beschrieben werden, worin $2\Delta z$ die Halbwertsbreite eines Maximums in Einheiten des Ringabstandes ist. Die Linienbreite eines Maximums ergibt sich dann zu

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{z} \cdot 2\Delta z$$

2 Aufgaben

1. Aufbau und Justierung der Apparatur.
2. Bestimmung des Plattenabstandes eines FABRY-PEROT-Etalons mit einer roten 643,9 nm Linie von Cadmium und Berechnung der (ungefähren) Interferenzordnung.
3. Relative Bestimmung der Wellenlängen der grünen und der dunkelblauen Linie des Cd-Spektrums.
4. Abschätzung der Linienbreite der Interferenzmaxima für die rote Linie im Vergleich mit der erwarteten instrumentellen Linienbreite.

3 Messprotokoll

Tutor: Borucki
Datum: 17. September 2006
Beginn: 15.30, Ende: 18.10

3.1 Geräte

- Cd-Dampf-Lampe mit Netzgerät
- Kollimatorlinse
- Farbfilter rot, grün, blau

- Irisblende
- Etalon
- Objektivlinse
- Mikrometerokular
- Maßband

3.2 Allgemeine Parameter und Bemerkungen

Abstand Okular-Objektivlinse (entspricht in etwa der Brennweite, da wir den Abstand so eingestellt haben, dass das Bild am schärfsten ist), gemessen mit Maßband: $f = (16,5 \pm 0,2) \text{ cm}$.

Die rote Cd-Linie: $\lambda = 643,9 \text{ nm}$

3.3 Messung

3.3.1 Aufgabe 2: Bestimmung von Abstand und Interferenzordnung

Mit dem Rotlichtfilter haben wir alles bis auf die bekannte 643,9 nm Linie von Cd herausgefiltert. Messung des Durchmessers der Ringe in der Mitte der Maximumverteilungen.

i	x_l/mm	x_r/mm
0	8,42	4,38
1	9,50	3,42
2	10,27	2,71
3	10,87	2,09
4	11,40	1,57

Tabelle 1: Rote Ringe

Wegen des schlechten Okulars¹ haben wir später noch eine neue Messung mit einem anderen durchgeführt.

¹Der Cursor war viel zu dünn um bei den durch die Filter stark abgedunkelten Bildern noch zu erkennen zu sein, die Ringe waren dagegen schön zu sehen.

i	x_l/mm	x_r/mm
0	3,46	7,70
1	2,44	8,71
2	1,69	9,48
3	1,06	10,04
4	0,52	10,59
5	0,03	11,07
6	-0,39	11,51
7	-0,79	11,87

Tabelle 2: Rote Ringe 2

3.3.2 Aufgabe 3: Bestimmung der Wellenlängen der grünen und blauen Linie

Zunächst die Messung mit dem grünen Farbfilter, die Messung wurde wieder wie bei Aufgabe 1 durchgeführt.

Auch für die grüne Linie haben wir später mit dem anderen Okular eine weitere Messung durchgeführt.

i	x_l/mm	x_r/mm
0	4,26	6,87
1	3,19	7,96
2	2,45	8,73
3	1,84	9,31
4	1,32	9,81
5	0,82	10,27
6	0,46	10,67
7	0,09	11,04
8	-0,29	11,39
9	-0,62	11,70

Tabelle 4: Grüne Ringe 2

Die blaue Linie haben wir nur einmal mit dem besseren Okular gemessen, leider dunkelte dieser Filter das Bild besonders stark ab, sodass hier nicht so viele Maxima vermessen werden konnten:

i	x_l/mm	x_r/mm
0	3,75	7,46
1	2,93	8,28
2	2,31	8,89
3	1,78	9,31
4	1,30	9,86

Tabelle 5: Blaue Ringe

3.3.3 Aufgabe 4: Linienbreite

Zur Vermessung der Linienbreite des ersten Ringes (Ordnung 0) der roten Linie haben wir abwechselnd links und rechts vom Zentrum einmal links und einmal rechts vom Ring die Mikrometerschraube abgelesen.

x_l/mm	x_r/mm
3,54	3,30
7,88	7,59
3,61	3,29
3,63	3,32
7,81	7,55
7,83	7,57

Tabelle 6: Linienbreite

4 Auswertung

4.1 Aufgabe 2: Bestimmung von Abstand und Interferenzordnung

Zur Berechnung des Abstandes d betrachten wir Gl. (7) in abgewandelter Form:

$$r_i^2 - r_0^2 = \frac{\lambda f^2}{d} i \quad (11)$$

Die Radien erhalten wir aus unseren Messwerten einfach als die Hälfte der Differenz von x_l und x_r . Damit tragen wir die Größe $r_i^2 - r_0^2$ über der Ordnung i auf, erhalten wir $m = \frac{\lambda f^2}{d}$ als Steigung. Die Auftragung und Steigungsbestimmung haben wir mit unserem Mathematica-Programm zur linearen Regression gemacht.

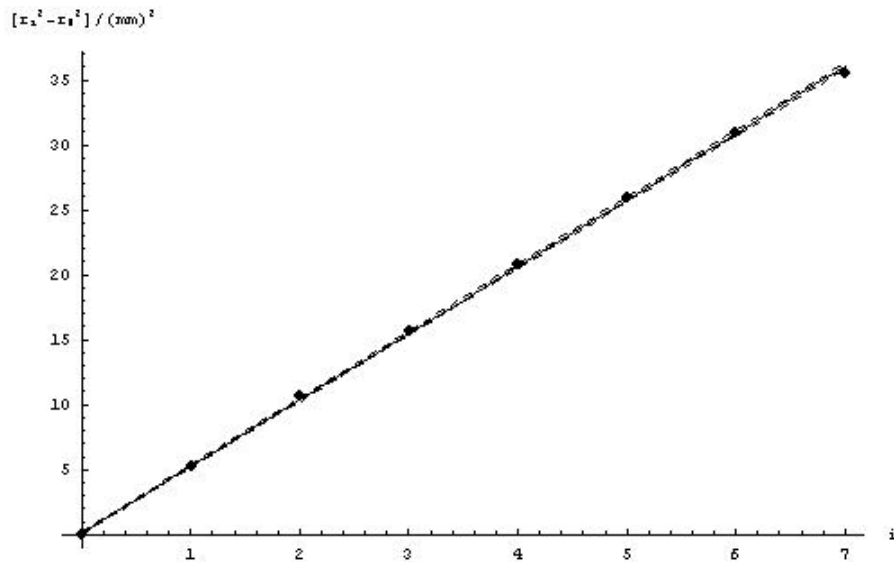


Abbildung 2: rote Cd-Linie 649,3nm

Mathematica gibt als Steigung den Wert $m = (5,13 \pm 0,03) 10^{-6} m^2$. Jetzt kann der Grenzflächenabstand berechnet werden.

$$d = \frac{\lambda f^2}{m} \quad (12)$$

$$\delta d = \sqrt{\delta m^2 + 4\delta f^2} \quad (13)$$

Die Angabe der roten Wellenlänge von Cd im Skript wird als exakt angenommen.

$$d = (3,4 \pm 0,1) mm$$

Die (ungefähre) Interferenzordnung ergibt sich aus Gl. (5) mit dem Wert für das 0. Maximum bei der zweiten Messung der roten Linie ($i = 0, r = 2,12 mm$).

$$z \approx 10.560$$

4.2 Aufgabe 3: Bestimmung der Wellenlängen der grünen und blauen Linie

Die unbekanntenen Wellenlängen berechnen sich ebenfalls aus Gl. (11) und können wie oben durch lineare Regression aus den Steigungen bestimmt werden. Diesmal muss Gl. (12) nur nach λ aufgelöst werden.

$$\lambda = \frac{md}{f^2} \quad (14)$$

$$\delta\lambda = \sqrt{\delta m^2 + \delta d^2 + 4\delta f^2} \quad (15)$$

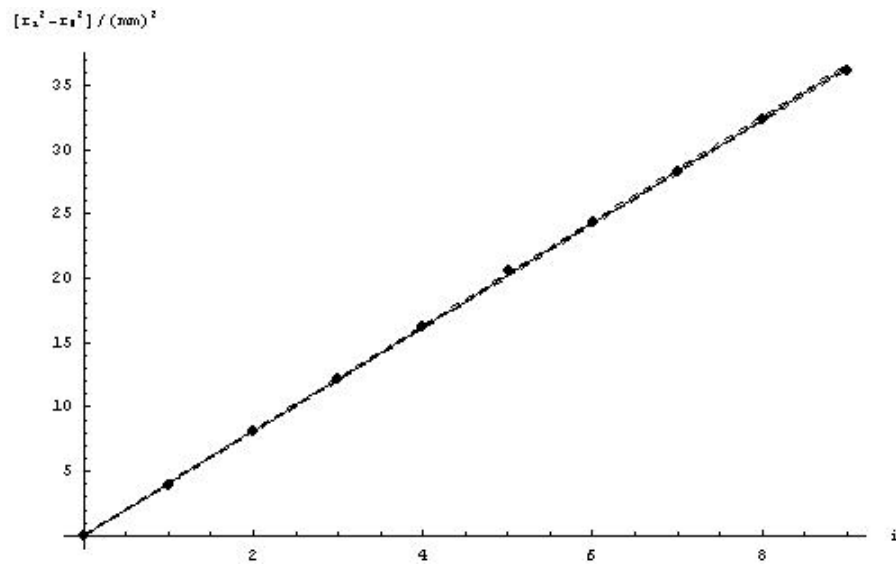


Abbildung 3: grüne Cd-Linie

Mathematica gibt als Steigung für die grüne Linie (Grafik oben) eine Steigung von $m_g = (4,05 \pm 0,02) 10^{-6} m^2$ aus. Daraus berechnet sich die Wellenlänge zu

$$\lambda_g = (508 \pm 17) nm$$

Für die blaue Linie des Cadmium ergibt sich diese Grafik:

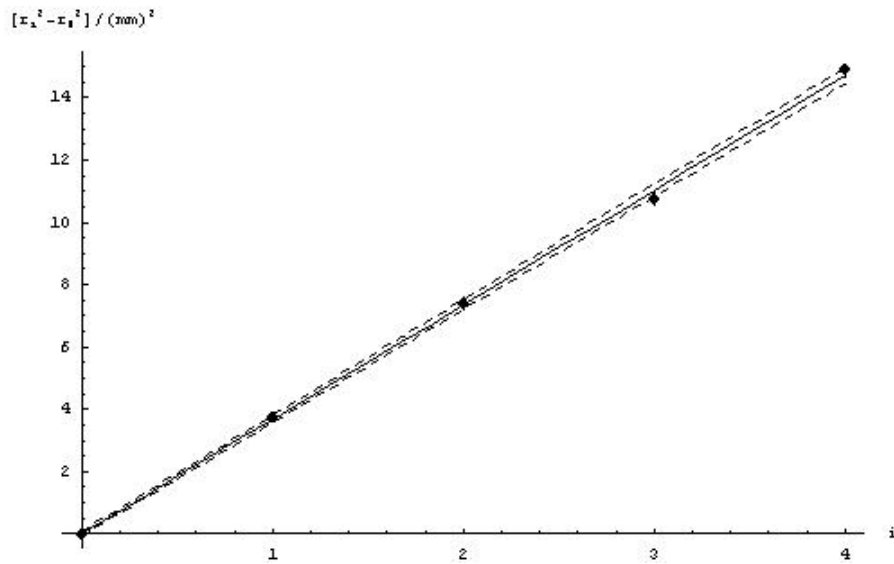


Abbildung 4: blaue Cd-Linie

Mathematica gibt als Steigung diesmal $m_b = (3,67 \pm 0,05) 10^{-6} m^2$ aus, was auf diese Wellenlänge schließen lässt:

$$\lambda_b = (461 \pm 19) nm$$

4.3 Aufgabe 4: Linienbreite

Zunächst haben wir die Ringbreite b am 0. Maximum der roten Linie direkt vermessen:

x_l/mm	x_r/mm	b/mm
3,54	3,3	0,24
7,88	7,59	0,29
3,61	3,29	0,32
3,63	3,32	0,31
7,81	7,55	0,26
7,83	7,57	0,26

Tabelle 7: Linienbreite

Durch Mittelwertbildung und Varianzabschätzung

$$\bar{b} = \frac{\sum b_i}{n} \quad (16)$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum (b_i - \bar{b})^2}{n-1}} \quad (17)$$

ergibt sich $b = (0,28 \pm 0,03) \text{ mm}$.

Betrachten wir nun Gl. (8) und setzen $r = r_0 + \frac{b}{2}$ und $r' = r_0 - \frac{b}{2}$ um so die Linienbreite $\Delta\lambda$ zu bestimmen, die zwischen dem inneren und dem äußeren Rand der Linie besteht. (Der Radius r_0 ergibt sich aus der Messung mit dem neuen Okular als Hälfte der Differenz der Messungen am 0. Maximum. $r_0 = 2,12 \text{ mm}$)

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda}{2f^2}(r^2 - r'^2) \quad (18)$$

$$\delta(\Delta\lambda) \approx \sqrt{4\delta f^2 + \frac{\Delta b^2(r'^2 + r^2)}{(r^2 - r'^2)^2}} \quad (19)$$

Damit erhält man

$$\Delta\lambda \approx (14 \pm 2) \text{ pm}$$

Eine andere Methode ist das Anwenden der vereinfachten AIRY-Formel Gl. (10) und der Gleichung

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{z} \cdot 2\Delta z$$

Daraus ergibt sich die Linienbreite

$$\Delta\lambda \approx 4,34 \text{ pm}$$

4.4 Ergebnis

Als Dicke des Etalons erhalten wir $d = (3,4 \pm 0,1) \text{ mm}$.

Für die Interferenzordnung erhalten wir ohne Fehlerrechnung $z \approx 10.560$.

Die grüne Linie des Cadmium bestimmen wir zu $\lambda_g = (508 \pm 17) \text{ nm}$, die blaue Linie zu $\lambda_b = (461 \pm 19) \text{ nm}$. Die Literaturwerte für diese Linien betragen $\lambda_g = 508,6 \text{ nm}$ und $\lambda_b = 479,9 \text{ nm}$. Die ermittelten Werte sind also im Rahmen der Fehlerintervalle mit den Vergleichswerten gleich.

Als Linienbreite erhalten wir einmal $\Delta\lambda \approx (14 \pm 2) \text{ pm}$ und einmal $\Delta\lambda \approx 4,34 \text{ pm}$. Diese Ergebnisse sind signifikant verschieden.

5 Diskussion

Der FABRY-PEROT-Etalon zeigt insgesamt eine überraschend hohe Präzision, was Spektralanalysen angeht. Diesen Schluss ziehen wir insgesamt aus unseren Messungen, abgesehen von der letzten.

Bei diesem Experiment störte insbesondere die Starke verdunkelung der Filter. Insbesondere mit dem ersten verwendeten Okular, dessen Cursor sehr viel

dünnere als die zweite war, war in den dunklen Bildern kaum mehr als die zweite oder dritte Ordnung auszumessen, da man den Strich einfach nicht mehr sehen konnte. Auch die Mikrometerschraube(n) hatten diesmal vermutlich wieder Spiel; wir haben das durch Herandrehen von immer nur einer Seite zu eliminieren versucht.

Problematisch war auch die Frage, wo genau man nun den Cursor hinsetzen soll: Die Maxima hatten eine gewisse Ausdehnung und es ist schwierig einzuschätzen, wo nun die größte Helligkeit auftritt. Dieses Problem betrifft vor allem die inneren Ringe, da deren Ausdehnung erheblich größer war als die der äußeren. Wir haben die Maxima immer in ihrer Mitte gemessen, da uns das einfacher und genauer erschien. Schließlich war ein "Rand" ja nicht vorhanden, sondern nur ein fließender Übergang. Da man in diesem bei Aufgabe 4 dennoch irgendwo den Cursor platzieren musste, vermuten wir dies als Hauptfehlerquelle der unbefriedigenden Ergebnisse der Aufgabe 4.

Der Fehler der Längenmessung des Abstandes f ist mit 1,2% nicht allzu groß, konnte aber sicher noch nicht vernachlässigt werden.

Ein weiteres (kleines) Problem waren die Farbfilter. Verwendet man Filter, die ein zu breites Spektrum hindurchlassen, können mehrfache Ringe auftauchen. Glücklicherweise fanden sich für alle drei Farben geeignete Filter.