Lineare Algebra

Aufgabe 1:

(a) Gegeben seien zwei Vektoren $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ und $(\mathbf{a} - \mathbf{b})$. Wann stehen beide Vektoren senkrecht aufeinander?

(b) Drücken Sie $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (die Fläche des durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms) durch Skalarprodukte aus.

Aufgabe 2:

(a) Bilde aus $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ die Vektoren

$$\mathbf{a} + \mathbf{b},\ \mathbf{a} - \mathbf{c},\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c},\ \mathbf{a} \times \mathbf{b},\ \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

(b) Berechne ebenso die Winkel $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\measuredangle(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ und $\measuredangle(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

(c) Welcher Vektor steht senkrecht auf $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ und $\mathbf{b} = (1, 0, -1)$?

Aufgabe 3:

(a) Eine Gerade geht durch den Punkt $(1, 2)$ und hat die Steigung 2. Wie lautet die Parameterdarstellung?

(b) Wie lautet der Normalenvektor $\mathbf{n}$ mit Länge 1 zu dieser Gerade? Welchen Abstand hat die Gerade vom Ursprung?

(c) Wie lautet die funktionale Form der Gerade?

Aufgabe 4:

(a) In einer Klasse hat eine Schülerin doppelt so viele Mitschülerinnen wie Mitschüler, dagegen ein Schüler 2,6 mal so viele. Was ist die Zahl der Schülerinnen und Schüler?

(b) Ein Flugzeug braucht für die Strecke s mit dem Wind die Zeit t und gegen den Wind die Zeit $1{,}2t$. Wie groß sind Flugzeug- und Windgeschwindigkeit?

Aufgabe 5:

Lösen Sie:

(a) $8x - 3y = 11; \quad 5x + 2y = 34.$

(b) $12x + 16y = 28; \quad 15x + 20y = 35.$

(c) $2x - 2y = -3; \quad -3x + 3y = 9.$

(d) $8x - 6y = 2; \quad 2x + 3y = 2.$

Aufgabe 6:

(a) Ein Polynom $ax^2 + bx + c$ soll durch den Punkt $(1, 0)$ gehen und in $(2, 6)$ die Steigung 8 haben. Wie lauten die Koeffizienten?

(b) In einem Dreieck ist ein Winkel doppelt so groß wie ein anderer, zusammen sind sie so groß wie der dritte. Bestimmen Sie die Winkel.

(c) Lösen Sie $x = 14 - z$, $-y = x + 1$, $1 = z + y$.

Aufgabe 7: Multiplizieren Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$