Grundlegendes

Aufgabe 1:

Beweisen Sie die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(quadratische Ergänzung)

Aufgabe 2:

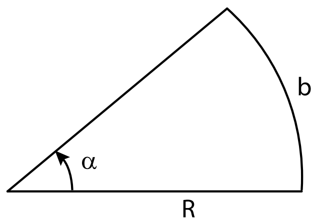
Beweisen Sie die Formel

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

für die geometrische Reihe.

Aufgabe 3:

Drücken Sie die Bogenlänge b als Kreissegment (s. Skizze) durch Winkel α und Radius R aus.



Aufgabe 4:

Beweisen Sie, ausgehend von der in der Vorlesung bewiesenen Relation $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$ die folgenden trigonometrischen Identitäten

(a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

(b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$
$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$

(c) $\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

(d) Drücken Sie $\sin 3\alpha$ durch $\sin\alpha$ aus.

(e) Drücken Sie $\tan(\alpha+\beta)$ durch $\tan\alpha$ und $\tan\beta$ aus.

(f) Vereinfachen Sie $\dfrac{\cos\alpha(1-\tan^2\alpha)}{\tan\alpha(\cot\alpha-1)}$.

Aufgabe 5:

Die sogenannten Hyperbelfunktionen wurden definiert durch

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$
$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

(sinus hyperbolicus etc.)

(a) Drücken Sie $\sinh(x+y)$ aus durch $\sinh x, \cosh x, \sinh y, \cosh y$ aus.

(b) Analog für $\cosh(x+y)$

Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den entsprechenden Formeln für $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$.

Aufgabe 6:

Ein Brückenbogen hat die Form einer Parabel mit Lagern bei $x = \pm\, 5\,m$ und Scheitelhöhe $4\,m$. Wie lautet die Gleichung der Parabel?

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie durch Polynomdivision das Verhalten von

(a) $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+1}$

(b) $f(x) = \frac{x^3-3x^2+4x+1}{x^2+2}$

für große Werte von x. Vernachlässigen Sie Terme der Typs $\frac{1}{x^n}$ mit $n \geq 3$.