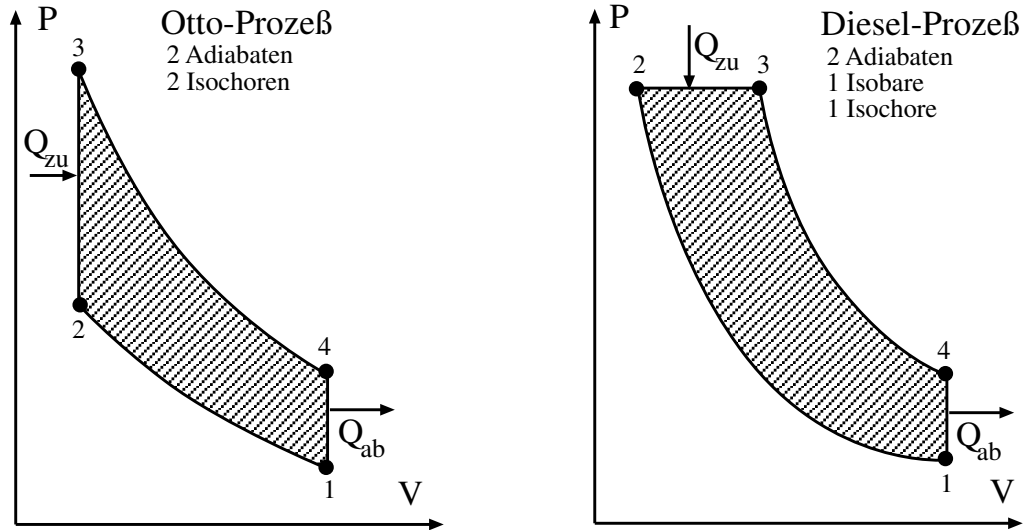


## §7 Technische Kreisprozesse

Die folgenden kurzen Überlegungen und Diagramme sind dem Buch von Hering, Martin & Stohrer "Physik für Ingenieure" VDI-Verlag (Düsseldorf) entnommen. Es ist klar, daß es sich hierbei um sehr starke Vereinfachungen handelt. Man sieht aber, daß nur wenige Änderungen gnügen um vom CARNOTSche Kreisprozeß zum OTTO-Prozeß oder STIRLING-Prozeß zu kommen.



Idealisiertes Arbeitsdiagramm des Otto- und Dieselmotors

Im "Viertaktmotor" oder Ottomotor wird ein Benzin-Luftgemisch verbrannt und zwar so schnell nach der Zündung, so daß der Druck von ② → ③ ansteigt, ohne daß sich das Volumen ändert. Vorher, von ① → ② ist dieses Gemisch komprimiert worden, mit dem Verdichtungsverhältnis  $V_1/V_2 \approx 8$ . Dieses Verhältnis darf nicht zu groß gewählt werden, weil sonst der Motor "klopft". Bei der Expansion, Schritt ③ → ④ wird die eigentliche Arbeit geleistet. Der Austausch verbrannter Gase durch Frischluft wird als "isochore"† Wärmeabgabe idealisiert. Um den Wirkungsgrad  $\eta$  zu bestimmen, ist es nicht nötig die Größe der schraffierten Fläche, also der Arbeit  $W$  im Arbeitsdiagramm zu bestimmen. Da die Arbeit  $W$  die Differenz von zugeführter Wärme  $Q_{zu}$  und abgegebener Wärme  $Q_{ab}$  ist

$$\eta = \frac{W}{Q_{zu}} = 1 - \frac{Q_{ab}}{Q_{zu}},$$

so daß für den Ottomotor mit der spezifischen Wärme bei konstanten Volumen  $C_v$ ,  $Q_{zu} = C_v(T_3 - T_2)$  und  $Q_{ab} = C_v(T_4 - T_1)$

$$\eta_{Otto} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

ist. Letzteres mit der Adiabatenbeziehung  $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$  und  $T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}$ , so daß  $T_4/T_1 = T_3/T_2$  ist und sich damit der Bruch in einer Form, wie der Carnotwirkungsgrad schreiben oder auch durch das Verdichtungsverhältnis ausdrücken läßt.

Beim Dieselmotor kann man das Verdichtungsverhältnis bis auf einen Druck von 30–50 atm vergrößern. Beim Direkteinspritzverfahren wird erst beim Punkt ② das Dieselöl eingespritzt und

† "isochor" aus dem griechischen  $\chi\acute{\omega}\rho\alpha$  = Raum analog zu "isobar" mit  $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$  = schwer

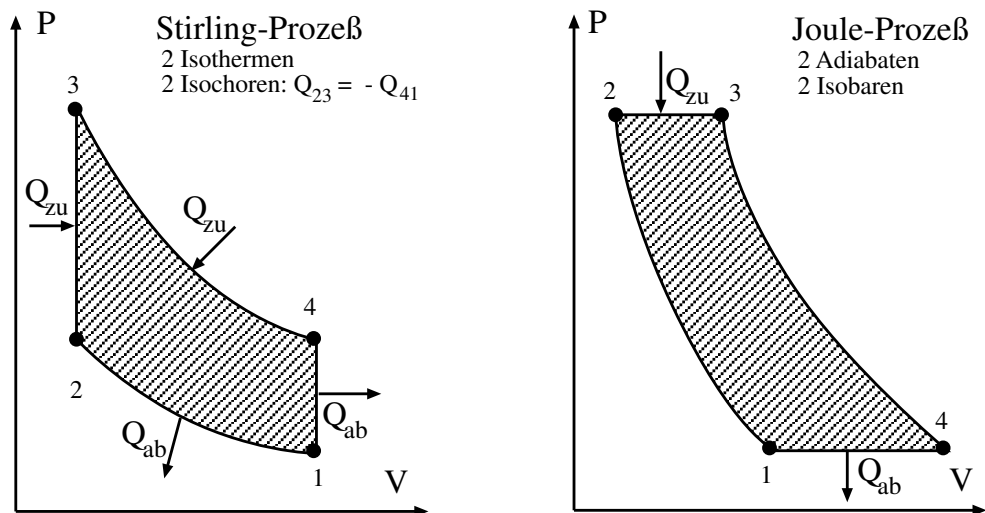
verbrennt dann durch Selbstzündung, als isobarer Prozeß ② → ③ idealisiert. Der Wirkungsgrad wäre damit

$$\eta_{Diesel} = 1 - \frac{C_p}{C_v} \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

mit  $C_p/C_v = \gamma$ .

Mit dem Stirlingmotor, auch als Heißluftmotor bezeichnet, läßt sich im Prinzip der Carnotsche Wirkungsgrad erreichen, man muß nur dafür sorgen, daß die Wärmemenge, die bei der einen Isochoren ④ → ① anfallen bei der zweiten ② → ③ wieder zugeführt werden, wie in der Skizze notiert sollte  $|Q_{23}| = |Q_{41}|$  sein. Dies läßt sich technisch nur unvollkommen realisieren. Im Idealfalle wäre der Wirkungsgrad nur von den Wärmebilanz der Isothermen wie beim Carnotprozeß bestimmt, dh.

$$\eta_{Stirling} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$



Idealisiertes Arbeitsdiagramm für Stirling- und Düsenmotor

Mit dem Jouleprozeß versucht man den Energiebilanzen bei einer "offenen" Gasturbine, also bei einem Flugzeugmotor z.B., zu verstehen:

- ① → ② Isentropische Kompression der Luft.
- ② → ③ Kerosin in der Brennkammer verbrannt, isobare Erwärmung.
- ③ → ④ Turbine leistet Arbeit, adiabatische Expansion.
- ④ → ① Verbrannte Gase ausgestoßen, Abschluß des Kreisprozesses als isobarer Prozeß.

$$\eta_{Joule} = 1 - \frac{C_p(T_4 - T_1)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

Wie beim Ottomotor weiter oben findet man  $T_4/T_1 = T_3/T_2$ , und zwar aus der Adiabatenbeziehung  $Tp^{-(\gamma-1)/\gamma} = \text{const.}$  Damit kann wie dort die Formeln vereinfachen.

§8 Die thermodynamische Potentiale  $U$  und  $F$

Zunächst einige mathematische Erläuterungen vorausgeschickt! Betrachtet man die Funktion von zwei Variablen  $f(x, y)$  und ihre partiellen Ableitungen  $\partial f/\partial x$  und  $\partial f/\partial y$  dann kann man das sogenannte totale Differential  $df$  wie folgt notieren

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy .$$

Man kann diese Formel als Taylorentwicklung für sehr kleine Größen interpretieren, die man nach dem linearen Term abbrechen kann, aber eigentlich ist damit mehr gemeint. Man kann ausgehend von einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} g(x, y) + h(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = g(x, y) dy + h(x, y) dx$$

ein totales Differential finden, vorausgesetzt, die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = h, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g$$

ist erfüllt, so daß

$$df = h(x, y) dx + g(x, y) dy$$

integriert werden kann. Die Integrabilitätsbedingung garantiert, daß ein Integral zwischen zwei Punkten vom Integrationsweg unabhängig ist. Die Lösung der Differentialgleichung ist dann durch  $f(x, y) = const.$  gegeben. Die Differentialgleichungen bei denen dieser Trick zur Lösung funktioniert, heißen *exakte* Differentialgleichungen. Im allgemeinen Fall wird dieses Verfahren nicht funktionieren, so daß die Funktionen  $g$  und  $h$  kein totales Differential definieren und ein Integral  $f$  nicht existiert. Deshalb schreibt man auch in diesem allgemeinen Fall, wo die Integrabilitätsbedingung nicht gilt

$$\delta f = h(x, y) dx + g(x, y) dy \quad \text{falls} \quad \frac{\partial g}{\partial x} \neq \frac{\partial h}{\partial y} ,$$

um anzudeuten, daß es eine Funktion  $f$  nicht geben kann. Man kann jedoch zeigen, daß man durch Multiplikation mit einem Faktor, die Integration ermöglichen kann

$$d\tilde{f} = \lambda(x, y) h(x, y) dx + \lambda(x, y) g(x, y) dy \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\lambda g)}{\partial x} = \frac{\partial(\lambda h)}{\partial y} ,$$

obwohl es im allgemeinen schwierig sein wird, diesen integrierenden Faktor  $\lambda$  zu finden.

Die letzten beiden Formeln sind uns in den vorangegangenen Abschnitten als

$$\delta Q = dU + p dV \quad , \quad dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$$

begegnet. Die Differentialgleichung der Adiabaten  $0 = C_v dT + p dV$  folgte aus  $\delta Q = 0$  und der Näherung  $dU = C_v dT$  und ließ sich mit Hilfe der idealen Gasgleichung ohne weiteres integrieren. In der Thermodynamik ist also  $1/T$  der *integrierende* Faktor, der den ersten Hauptsatz in den zweiten Hauptsatz verwandelt und die Entropiedefinition  $dS = \delta Q/T$  ermöglicht.

Im folgenden sollen diese Differentiale für die Konstruktion weiterer *Thermodynamischer Potentiale* verwendet werden. Das Differential der *inneren Energie*  $dU$  läßt sich einfach durch Umstellung aus dem für die Entropie gewinnen

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV \quad \rightarrow \quad dU = T dS - p dV \quad \rightarrow \quad U = U(S, V)$$

so daß eigentlich nur die Energiebilanz des erste Hauptsatz  $dU = \delta Q + \delta W$  dasteht. Der zweite Hauptsatz führt aber zu einer wichtigen Änderung, indem als "richtige" Variable von  $U$  die Entropie und das Volumen erscheinen, also die Temperatur  $T$  ist durch die Entropie  $S$  ersetzt. Nimmt man als Beispiel die Entropieformel für das ideale Gas aus dem letzten Abschnitt  $S(U, V) = C_v \ln U + R \ln V$ , die nach  $U$  aufgelöst die folgende Form annimmt

$$U_{iG}(S, V) = V^{-\frac{R}{C_v}} e^{\frac{S}{C_v}} \quad ,$$

dann kann man durch Differentiation, die ideale Gasgleichung zurückgewinnen:

$$T = \left( \frac{\partial U_{iG}}{\partial S} \right)_V = \frac{1}{C_v} U_{iG} \quad , \quad p = - \left( \frac{\partial U_{iG}}{\partial V} \right)_S = \frac{R}{C_v} \frac{U_{iG}}{V} \quad \rightarrow \quad p = \frac{RT}{V} \quad .$$

Das thermodynamische Potential  $U$  enthält in Abhängigkeit von den "richtigen" Variablen  $S, V$  alle Informationen. Merkwürdigerweise ist jetzt die Abhängigkeit vom Volumen  $V$  kompliziert, während  $U$  als Funktion der Temperatur unabhängig von  $V$  ist, wie man leicht an der ersten Beziehungen der letzten Formelzeile ablesen kann ...

Die Integrabilitätsbedingung des Differentials  $dU$  ist

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_V \quad .$$

Man nennt Beziehungen dieser Art *Maxwell*relationen. In dieser Form sehen sie jedenfalls nicht wie Trivialität aus, aber eigentlich steht da nur

$$\frac{\partial^2 U(S, V)}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U(S, V)}{\partial S \partial V} \quad .$$

Für die meisten Probleme der Thermodynamik ist die innere Energie  $U$  keine "bequeme" Größe. Durch den Trick der *Legendre*transformation lassen sich die noch fehlenden thermodynamischen Potentiale: *Freie Energie F*, *Gibbsches Potential G* und *Enthalpie H* leicht angeben. Diese Prozedur ist aus der Mechanik bekannt, wo es zwei Zugänge zu den Bewegungsgleichungen gibt. Man kann sie einmal durch die Lagrangefunktion  $\mathcal{L}$  finden, aber auch durch die Hamiltonfunktion  $\mathcal{H}$ . Lagrange- und Hamiltonfunktion sind durch die eben erwähnte Legendretransformation verknüpft, die die Geschwindigkeiten  $\dot{q}$  in der Lagrangefunktion durch die Impulse  $p$  ersetzt, und bei dieser Ersetzung transformiert sich die Lagrangefunktion in die Hamiltonfunktion. Hier das Schema in einer Zeile:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad , \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \quad ; \quad \mathcal{H}(q, p) = \dot{q} p - \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad .$$

Nach diesem Schema kann man nun die *Freie Energie F* definieren

$$U(S, V) \quad , \quad T = \frac{\partial U}{\partial S} \quad ; \quad F(T, V) = U(S, V) - T S \quad .$$

Um zu sehen, was diese Manipulationen bewirken, rechnet man das totale Differential von  $F$  aus

$$dF = dU - d(T S) \quad , \quad dF = T dS - p dV - dT S - T dS \quad \rightarrow \quad dF = -S dT - p dV \quad .$$

Man sieht also, daß in der Tat die neue Variable von  $F$  die Temperatur  $T$  ist. Aus der Integrabilitätsbedingung findet man eine weitere Maxwellrelation

$$\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad .$$

Die Voraussetzungen der Legendretransformation sind für thermodynamische Funktionen  $U$  erfüllt,  $U$  muß eine konvexe Funktion sein, was garantiert ist, denn die spezifische Wärme die in der zweiten Ableitung von  $U$  nach der Entropie auftaucht ist immer positiv.