§6 *Weiße Zwerge*

Im Abschnitt 3 war mit der Formel (∗∗) der Druck P als Funktion der Dichte ρ für ein entartetes Fermigas bestimmt worden:

$$P_{nrel} \;=\; \frac{h^2}{20\,m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\rho^{5/3}\;. \tag{$*$}$$

Im folgenden geht es darum eine große Fermigaskugel unter dem Einfluß der Gravitation zu berechnen. Die Idee, der man dabei folgt, ist, daß der Druck der Elektronen viel größer ist, als der der Atomkerne, denn der Druck eines entarteten Fermigases verglichen mit einem klassischen idelaen Gas ist

$$P \;=\; \begin{cases} \frac{2}{5}\,E_F\,\rho & \text{entartes Gas} \\ k_B\,T\,\rho & \text{ideales Gas} \end{cases}$$

Wenn also die Fermienergie E_F der Elektronen sehr viel größer als die thermische Energie k_BT ist, spielt der Druck des klassischen idealen Gases der Atomkerne keine Rolle.

Ist die Dichte ρ sehr groß, dann kann die Fermienergie größer werden als die Ruhenergie der Elektronen $m\,c^2 \;=\; 511\,\text{keV}$ so daß die Energie–Impulsrelation $E \;=\; c\,\sqrt{p^2+(m\,c)^2}$ an Stelle von $E \;=\; p^2/2m$ verwendet werden müßte. Für die Zwecke hier genügt es den "ultrarelativistischen" Grenzfall $E \approx c\,p$ zu betrachten. Die Fermienergie ist dann $E_F = c\,p_F$ und mit dem Fermiimpuls aus Abschnitt 3 erhält man

$$E_F = c\,p_F \;=\; \frac{hc}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\rho^{1/3}\;.$$

Benutzt man die thermodynamische Relation $d\mu \;=\; dP/\rho$, dann läßt sich der Druck ohne weitere Rechnungen bestimmen:

$$dP = \frac{d\mu}{d\rho}\,\rho\,d\rho \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{h\,c}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\rho^{1/3}\,d\rho \qquad\longrightarrow\qquad P_{urel} = \tfrac{1}{4}\,\rho\,E_F = \frac{h\,c}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\rho^{4/3}\;. \tag{$**$}$$

Mit Gleichung (∗) kennt man den Druck für den nichtrelativistischen Grenzfall und mit (∗∗) den ultrarelativistischen Grenzfall.

Um einen Stern als Gaskugel im Gleichgewicht von Druckkräften mit den Gravitationskräften zu modellieren geht man von der Gleichung

$$\mu + m_k\varphi_g = \text{konst} \qquad \text{oder} \qquad \nabla P = -\rho\,m_k\,\nabla\varphi_g = \vec{K}_g \tag{$+$}$$

aus, wobei φ_g das Gravitationspotential und μ das chemische Potential oder die Fermienergie ist. Die zweite differenzierte Form gibt die Gleichheit der Druck– und Gravitationskräfte. Sie folgt aus der ersten, wenn man $\nabla\mu = \nabla P/\rho$ benutzt. Die Masse m_k ist faktisch die Kernmasse, die auf ein Elektron aufgeteilt etwa zwei Protonenmassen m_p entspricht, wenn man annimmt, daß aller Wasserstoff durch Kernfusion in Helium und schwerere Kerne umgewandelt worden ist.

Das Gravitationspotential genügt der Potentialgleichung ($\gamma \;=\; 6,67\cdot 10^{-8}\,\text{cm}^3\,\text{g}^{-1}\,\text{sec}^{-2}$ ist die Gravitationskonstante)

$$\Delta\,\varphi = 4\,\pi\,\gamma\,m_k\,\rho \qquad\longrightarrow\qquad \frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{d\varphi}{dr}\right) \;=\; 4\,\pi\,\gamma\,m_k\,\rho(r)\;,$$

und radiale Symmetrie vorausgesetzt, der Stern soll also nicht schnell rotieren, bekommt man daraus eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Das Gravitationspotential φ kann man eliminieren, weil mit (+) $m_k\,\Delta\varphi = -\Delta\mu$ ist und das chemische Potential oder die Fermienergie mit der Dichte

$$E_F = \mu \;=\; \begin{cases} \frac{h^2}{8\,m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3}\rho^{2/3} & \text{nichtrelativistischer Fall} \\ \frac{hc}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\rho^{1/3} & \text{ultrarelativistischer Fall} \end{cases}$$

verknüpft ist, wobei $p_F = \frac{h}{2}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\rho^{1/3}$ benutzt worden ist. Diese Beziehung umgestellt ergibt

$$\rho \;=\; \frac{8\,\pi}{3\,(hc)^3}\begin{cases}(2\,mc^2)^{3/2}\,\mu^{3/2} & \text{nichtrelativistischer Fall}\\ \mu^3 & \text{ultrarelativistischer Fall}\end{cases}$$

und damit hat man eine Differentialgleichung für das chemische Potential allein:

$$\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\mu}{dr}\right) \;=\; -\frac{32\,\pi^2\,\gamma\,m_k^2}{3\,(hc)^3}\begin{cases}(2\,mc^2)^{3/2}\,\mu^{3/2} & \text{nichtrelativistischer Fall}\\ \mu^3 & \text{ultrarelativistischer Fall}\end{cases}$$

Diese Differentialgleichungen kann man nur numerisch integrieren, aber durch skalieren gewinnt man schon ein Verständnis für die Größenordnung. Am Rand des Sterns bei $r = R$ ist die Dichte ρ, der Druck und das chemische Potential μ Null. Das Gravitationspotential ist dort $\varphi(R) = -\gamma M/R$, wobei M die Masse des Sterns ist. Im Zentrum des Sterns ist das Gravitationspotential $\varphi(0)-\varphi(R) \propto -\gamma M\int_0^R r/R^3\,dr = -\gamma M/(2R)$, allerdings hängt der genaue Zahlenwert von der Dichteverteilung $\rho(r)$ ab. Da nach der Beziehung (+) das chemische Potential im Zentrum $\mu(0) = m_k\big(\varphi(0)-\varphi(R)\big)$ ist, ist es sicherlich sinnvoll ein dimensionsloses chemisches Potential $\tilde{\mu} = R\mu/(\gamma M\,m_k)$ zu verwenden. Außerdem sollte man r auf den Radius des Sterns normieren, dh. es ist $\tilde{r} = r/R$. Damit bekommt die Differentialgleichung im nicht relativistischen Fall die Form

$$\frac{1}{\tilde{r}^2}\,\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{r}}\right) \;=\; -\frac{4}{3\pi}\left(\frac{M\,R^3}{m_k}\right)^{1/2}\left(\gamma m_k^2\right)^{3/2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\tilde{\mu}^{3/2}$$

wobei ein dimensionsloser Faktor auf der rechten Seite der Gleichung steht. Man sieht also unmittelbar, daß man eine allgemeine Lösung konstruieren kann, wenn

$$M\,R^3 = \text{konst} \qquad \text{oder} \qquad R \propto \left(\frac{m_k}{M}\right)^{1/3}\frac{\hbar^2}{m\,\gamma m_k^2} \;=\; \lambda_c\left(\frac{m_k}{M}\right)^{1/3}\left(\frac{m_{pl}}{m_k}\right)^2$$

gilt. Für jede Masse M eines Sterns findet man ein Gleichgewichtsradius R, wobei man das zunächst paradox erscheinende Ergebnis, daß das Volumen des Sterns schrumpft, falls die Masse zunimmt, erhält.

Dies kann man einfacher herleiten: die Gravitationsenergie eines Sternes sollte von der Größenordnung $E_g \approx \gamma M^2/R$ sein, während die kinetische Energie $E_{kin} \approx N\cdot(\hbar^2/2m)\,(N/V)^{2/3}$ auf Grund der Quantenmechanik ist. Das Minimum der Gesamtenergie bei festgehaltener Masse, wobei die Anzahl der Elektronen durch $N = M/m_k$ und das Volumen des Sternes $V = 4\pi R^3/3$ ist, erhält man für $M \propto 1/R^3$.

Um den Radius zu bestimmen, kann man Planck folgend die Masse $m_{pl} = \sqrt{\hbar c/\gamma} = 2,177\cdot 10^{-5}$g verwenden, die sich merkwürdigerweise nur aus den Konstanten $\hbar$, c und γ bilden läßt. Comptonlänge des Elektrons $\lambda_c = \hbar/(mc) = 3,86\cdot 10^{-11}$cm ist dann die Skala, in der der Radius R des Sterns angeben ist. Die Kernmasse pro Elektron ist $m_k = 3,35\cdot 10^{-24}$g, zwei Protonenmassen vorausgesetzt. Nimmt man die Masse der Sonne $M_{Sonne} = 2\cdot 10^{33}$g, dann erhält man nach der obigen Formel $R \propto 10^{-11}\,10^{-19}\,10^{38} = 10^8$cm, was etwa der Größe des Mondes oder der Erde entsprechen würde. Für eine genauere Analyse konultiere man Landau & Lifschitz, Statistische Physik, Kap. XI. Auf jeden Fall, wäre solch ein Stern wegen seiner geringen Größe lichtschwach und nicht leicht zu beobachten. Das prominenteste Beipiel solch eines Zwergsternes ist der Begleiter des Sirius, dessen Existenz von Herschel im vorigen Jahrhundert aus der Positionsschwankung des Sirius gefolgert worden ist. Weil der Stern heiß ist, man hat ihn später auch beobachten können, nennt man ihn "weißen" Zwerg.

Wächst die Dichte und die Fermienergie des Sternes, dann nähert man sich den relativistischen Grenzfall. Folgt man der Argumentation von weiter oben, dann muß man die Summe von Gravitationsenergie und kinetischer Energie durch Wahl eines geeigneten Radius optimieren. Die kinetische Energie ist $E_{kin} \approx N \cdot \hbar\, c\,(N/V)^{1/3}$ und damit ebenfalls bei festgehaltener Teilchenzahl oder Masse $\propto 1/R$ wie die Gravitationsenergie, so daß man keinen Radius finden kann, bei dem der Stern stabil wäre.

Chandrasekhar hat die Masse angegeben, bei der der Stern im ultrarelativistischen Grenzfall gelangen und instabil werden würde. Skaliert man die Differentialgleichung wie vorher im nichtrelativistischen Grenzfall

$$\frac{1}{\tilde{r}^2}\,\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{r}}\right) \;=\; -\frac{4}{3\pi}\left(\frac{M}{m_k}\right)^2\left(\frac{\gamma m_k^2}{\hbar c}\right)^3\tilde{\mu}^3\;,$$

dann sieht man, daß

$$M \propto m_k\left(\frac{\hbar c}{\gamma m_k^2}\right)^{3/2} \;=\; m_k\left(\frac{m_{pl}}{m_k}\right)^3$$

sein sollte, damit die Differentialgleichung eine Lösung hat, wobei die Konstante auf der rechten Seite von der Größenordnung 1 sein wird. Das Verhältnis von Planckmasse zur Kernmasse ist etwa $m_{pl}/m_k \approx 10^{19}$, so daß für die Chandrasekharmasse etwa $M = 10^{-24}\cdot 10^{57} = 10^{33}$ g herauskommt, was der Größenordnung nach einer Sonnenmasse entsprechen würde.

Für eine genauere Analyse muß man die Differentialgleichung wirklich lösen. Zu diesem Zwecke verwandelt man die Differentialgleichung

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{df}{dx}\right) = -f^3(x) \qquad\longrightarrow\qquad f(x) = 1 - \int_0^x \frac{dx}{x^2}\int_0^x x^2 f^3(x)\,dx$$

in eine Integralgleichung, um durch Iteration eine Lösung zu finden. Als Anfangsbedingung wählt man zunächst $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$, was man unmittelbar an der Integralformel ablesen kann. Die Ableitung des chemischen Potential muß im Zentrum des Sterns verschwinden. Der Wert 1 ist zunächst willkürlich und wird später angepaßt.