

### §3 Sommerfeldentwicklung

In diesem Abschnitt soll die spezifische Wärme eines entarteten Fermigas berechnet werden. Nach den Überlegungen des vorherigen Abschnittes ist die Energie  $E$  durch folgendes Integral gegeben

$$E = \frac{V}{h^3} 8\pi \int_0^\infty k^2 dk \frac{\epsilon_k}{e^{(\epsilon_k - \mu)/k_B T} + 1} \quad ,$$

wobei  $\epsilon_k = k^2/2m$  oder relativistisch  $\epsilon_k = c\sqrt{(mc)^2 + k^2}$  ist. Es ist zweckmäßig dieses Integral als ein Integral über die die Energievariable  $\epsilon$  zu notieren, um mit der Exponentialfunktion zurechtzukommen:

$$\frac{E}{V} = \int_0^\infty \frac{\rho(\epsilon) \epsilon d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/k_B T} + 1} \quad . \quad (*)$$

Man nennt  $\rho(\epsilon)$  die Zustandsdichte, dh.  $\rho$  gibt die Anzahl der Einteilchenniveaus pro Energie und Volumen an. Für das nichtrelativistische Elektronengas ist  $\epsilon = k^2/2m$ ,  $d\epsilon = dk k/m$  und damit  $k^2 dk = m^{3/2}(2\epsilon)^{1/2} d\epsilon$ . Daraus erhält man für  $\rho$

$$\rho(\epsilon) = \frac{4\pi}{\epsilon} \left( \frac{2m\epsilon}{h^2} \right)^{3/2} \quad .$$

Die Zustandsdichte  $\rho$  ist so geschrieben, daß man die Dimension von  $\rho$  als "Anzahl/(Energie  $\times$  Volumen)" sehen kann, denn es ist  $h(2m\epsilon)^{-1/2} = \lambda$ , wobei  $\lambda$  die zur Energie  $\epsilon$  gehörige Wellenlänge  $\lambda$  ist.

Die mathematische Aufgabe besteht nun darin, das Integral (\*) für kleine Temperaturen  $T \ll \mu$  zu berechnen. Benutzt man die Identität

$$\frac{1}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^{-x} + 1} \quad ,$$

dann läßt sich das Integral (\*) in große  $E_0$  und kleine Terme  $E_T$ , die für  $T \rightarrow 0$  verschwinden, aufteilen. Mit  $E = E_0 + E_T$  erhält man

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{V} &= \int_0^\mu \rho(\epsilon) \epsilon d\epsilon \\ \frac{E_T}{V} &= - \int_0^\mu \frac{\rho(\epsilon) \epsilon d\epsilon}{e^{-(\epsilon - \mu)/k_B T} + 1} + \int_\mu^\infty \frac{\rho(\epsilon) \epsilon d\epsilon}{e^{(\epsilon - \mu)/k_B T} + 1} \quad . \end{aligned} \quad (**)$$

Führt man als neue Variable  $x = -(\epsilon - \mu)/k_B T$  bzw.  $x = (\epsilon - \mu)/k_B T$  ein, dann läßt sich (\*\*) folgendermaßen schreiben

$$\frac{E_T}{V} = -k_B T \int_0^{\mu/T} \frac{\rho(\mu - k_B T x) (\mu - k_B T x) dx}{e^x + 1} + k_B T \int_0^\infty \frac{\rho(\mu + k_B T x) (\mu + k_B T x) dx}{e^x + 1} \quad .$$

Da die Funktion  $1/(e^x + 1)$  für  $x \ll 1$  sehr schnell abfällt kann man im Zähler die Funktionen um  $x = 0$  in eine Potenzreihe entwickeln. Außerdem kann man dann die Integration bis  $\infty$  erstrecken. Es gilt also zunächst

$$\rho(\mu \mp k_B T x) (\mu \mp k_B T x) = \rho(\mu) \mu \mp k_B T [\mu (d\rho(\mu)/d\mu) + \rho(\mu)] + \dots \quad ,$$

so daß man schließlich für das Integral (\*\*)

$$\frac{E_T}{V} \approx (k_B T)^2 [\mu (d\rho(\mu)/d\mu) + \rho(\mu)] \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1}$$

erhält. Das bestimmte Integral ist nicht schwierig zu berechnen. Es ist

$$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Um aus der Energie  $E$  die spezifische Wärme zu bekommen, braucht man im Prinzip nur nach der Temperatur abzuleiten. Ein Problem bereitet das chemische Potential  $\mu$ , das auch temperaturabhängig ist, wenn die Teilchenzahl  $N$  konstant bleiben soll. Für die Teilchenzahl  $N$  gibt es eine analoge Zerlegung in einen Teil bei der Temperatur Null  $N_0$  und einen temperaturabhängigen Teil  $N(T)$ :

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{V} &= \int_0^\mu \rho(\epsilon) d\epsilon \\ \frac{N_T}{V} &= - \int_0^\mu \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} + \int_\mu^\infty \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} \end{aligned}$$

Die Teilchenzahl  $N$  soll konstant sein, dh. es ist

$$0 = \frac{dN}{dT} = V \frac{dN_0}{dT} + V \frac{dN(T)}{dT} \approx V \left[ \rho(\mu_0) \frac{d\mu}{dT} + k_B T \frac{\pi^2}{3} \frac{d\rho(\mu)}{d\mu} \right]$$

mit  $\mu_0 = \mu(0)$ , dem chemischen Potential bei  $T = 0$ . Der Ausdruck in der eckigen Klammer sollte Null sein, so daß

$$\frac{dE_0}{dT} = V \frac{d\mu}{dT} \rho(\mu_0) \mu_0 = -V k_B T \frac{\pi^2}{3} \mu \frac{d\rho(\mu)}{d\mu}$$

und man für die spezifische Wärme  $C = dE/dT$  in der Nähe des absoluten Nullpunktes der Temperatur

$$\boxed{C = k_B^2 T \rho(\mu_0) \pi^2/3}$$

eine lineare Temperaturabhängigkeit erhält, wobei die Steigung der Zustandsdichte  $\rho$  proportional ist. Dies ist ein wohlbekanntes Resultat für die Physik der Metalle (siehe Bethe & Sommerfeld im alten Handbuch der Physik) . . .

Man kann leicht zeigen, daß die Zustandsdichte für das freie Elektronengas sich auch folgendermaßen schreiben läßt

$$\rho(\epsilon_F) = \frac{3}{2} \frac{N}{V \epsilon_F} \quad ,$$

wobei die Fermienergie  $\epsilon_F$  gleich dem chemischen Potential  $\mu_0$  ist.