

### §3 Entartetes Fermigas

In Metallen sind die Atome so dicht gepackt, daß die äußeren Elektronen, die die chemische Bindung verursachen frei beweglich sind. Sie bilden ein entartetes FERMI-Gas. Für solch ein Gas kann man die Temperatureffekte zunächst vernachlässigen, also die Temperatur  $T = 0$  setzen. Im nächsten Abschnitt gibt die Sommerfeldentwicklung die Korrektur für endliche Temperaturen:  $F(T) - F(0) \propto -(k_B T)^2/E_F$ , wobei die Fermienergie  $E_F$  die Energie des obersten Quantenzustandes ist, der noch besetzt ist. Für Metallen ist die entsprechende Entartungstemperatur  $E_F/k_B$  von der Größenordnung 50 000–100 000 K. Durch die Gravitation kann man im Inneren von Sternen so hohe Drucke erwarten, daß die Entartungstemperatur sehr viel höher sein kann, wie im später gezeigt wird.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Verteilungsfunktion  $n(p)$

$$n(p) = \frac{1}{e^{(\epsilon_p - \mu)/k_B T} + 1} \xrightarrow{T=0} \begin{cases} 1, & \epsilon_p - \mu < 0 \\ 0, & \epsilon_p - \mu > 0 \end{cases}$$

Für  $T = 0$  muß man also nur die Zustände  $\epsilon_p < \mu$  berücksichtigen. Das chemische Potential  $\mu$  bezeichnet man auch als FERMIENERGIE  $E_F$  analog zum FERMIIMPULS  $p_F$ . Die Summation über alle Zustände ergibt die Teilchenzahl  $N$

$$N = V \frac{8\pi}{3} \frac{p_F^3}{h^3},$$

wobei der Inhalt einer Kugel mit Radius  $p_F/h$ , der die Anzahl der Zustände für das Einheitvolumen angibt, verwendet wurde. Man muß allerdings noch mit dem Volumen  $V$  multiplizieren und die zwei Spinzustände berücksichtigen, um die Anzahl der Zustände  $N$  zu bekommen. Kennt man die Dichte  $\rho = N/V$ , dann kann man den Fermiimpuls und die Fermienergie berechnen:

$$p_F = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \rho^{1/3}, \quad E_F = \mu = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \rho^{2/3}. \quad (*)$$

Für ein Metall wie Aluminium ergibt sich mit dem Atomgewicht von 27,0 und einer Dichte von 2.70 g/cm<sup>3</sup> die Zahl der Atome im cm<sup>3</sup> von  $N_{Avogadro}/10$ . Auf jedes Aluminiumatom kommen drei Elektronen, so daß  $\rho_{el} = 1,81 \cdot 10^{23} \times \text{cm}^{-3}$  ist und sich mit  $(3/\pi)^{2/3} = 0,9697$  und

$$h^2/k_B m_{el} = 6,62^2 \cdot 10^{-54} / (1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 9,11 \cdot 10^{-28}) \times \text{grad} \cdot \text{cm}^2 = 3,49 \cdot 10^{-10} \text{ grad} \cdot \text{cm}^2$$

für die Fermienergie von Aluminium  $E_F = (0,181^{2/3} \cdot 3,49/8) \cdot 10^6 \text{ grad} = 1,39 \cdot 10^5 \text{ grad}$  ergibt, was etwa 12 eV entspricht also einem Rydberg, das die Skala für "chemische" Energien ist.

Die Energie des Fermigas erhält man, wenn man die Zahl der Zustände  $8\pi V p^2 dp/h^3$  mit  $\epsilon_p = p^2/2m$  multipliziert und integriert:

$$U = V \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4 dp}{2m} = \frac{3}{5} N E_F.$$

Da die Fermienergie  $E_F \propto \rho^{2/3}$  ist erhält man für den Druck mit  $P = -dU/dV$

$$P = \frac{2}{3} U/V = \frac{h^2}{20m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \rho^{5/3}. \quad (**)$$

Der Druck eines Fermigas ist für  $T = 0$  proportional zur 5/3 Potenz seiner Dichte. Dieses Verhalten ist im vorigen Abschnitt für die Adiabaten gefunden worden. Am absoluten Nullpunkt ist die Entropie Null und damit konstant. Deshalb ist die Übereinstimmung nicht zufällig.

Benutzt man die thermodynamische Relation  $d\mu = dP/\rho$ , dann kann man den Druck  $P$  auch aus der Gleichung (\*) für  $E_F$  direkt finden:

$$dP = \frac{d\mu}{d\rho} \rho d\rho = \frac{2}{3} \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \rho^{2/3} d\rho \quad \longrightarrow \quad P = \frac{2}{5} \rho \mu ,$$

was der Formel (\*\*) für den Druck entspricht.

Eine Frage die noch offen ist, in welchen Sinne ist das Modell nichtwechselwirkender oder freier Fermionen überhaupt gültig? Für das ideale Gas war der Gültigkeitsbereich derjenige geringer Dichten und hoher Temperaturen, wobei die VAN DER WAALSGleichung mit ihren Parametern diese Aussage präzisiert. Merkwürdigerweise ist es gerade der Fall hoher Dichten bei Fermionen für das die Wechselwirkung keine große Rolle spielt.

So ist im Atom die elektrostatische Wechselwirkung  $W_{Coulomb} \propto Z e^2/a$  zwischen dem Atomkern mit der Ladung  $Ze$  und den Elektronen der dominierende Anteil. Setzt man für die mittlere Distanz  $a \propto (Z\rho)^{-1/3}$  an, also einen mittleren Abstand zwischen den als frei beweglich angesehenen Elektronen, dann sieht man, daß die COULOMBwechselwirkung  $W_{Coulomb} \propto Z^{2/3} e^2 \rho^{1/3}$  ist. Die FERMIENERGIE ist aber  $E_F \propto h^2 \rho^{2/3}/m$ , so daß sie bei großen Dichten größer sein wird, als die Wechselwirkungsenergie. Das Verhältnis

$$W_{Coulomb}/E_F \propto \frac{e^2 m}{h^2} \frac{Z^{2/3}}{\rho^{1/3}} ,$$

wobei  $e^2 m/h^2$  der Wasserstoffradius ist. Mit anderen Worten alle Substanzen verwandeln sich unter hohem Druck in Metalle, in denen die Elektronen ein "freies" Fermigas bilden. Manchmal reicht der "Binnendruck" den die chemische Bindung erzeugt aus, um mit den Valenzelektronen, z.B. den drei äußeren Elektronen beim Aluminium jenseits der abgeschlossenen elektronischen Schalen wie im Edelgas Neon, ein Metall zu bekommen.