Übungen zur Thermodynamik
2. Blatt 27. 4. 2005

Abgabe 4. 5. Postfach "Thermodynamik" nahe 1.4.16 oder in der Vorlesung

Totales Differential und integrierender Faktor

1. (a) Mit $U = U(x, y)$ ist

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x dy$$

ein vollständiges Differential. Zeigen Sie, daß umgekehrt

$$dU = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$$

mit beliebigen Funktionen M und N nur dann ein vollständiges Differential ist oder integrierbar ist, wenn

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)_y$$

gilt.

(b) Prüfen Sie nach, daß

$$dU = \left(\frac{y^2}{x} - 2\right) dx + \left(3y - \frac{x}{y}\right) dy$$

kein vollständiges Differential ist, wohl aber $d\tilde{U} = xy \cdot dU$. Die Größe xy wird in diesem Zusammenhang als **integrierender Faktor** bezeichnet. Kann man immer solch einen integrierenden Faktor finden? Siehe dazu E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*. Der integrierende Faktor für der ersten Hauptsatz $dU = c_V\, dT - p\, dV$ ist $1/T$ beim idealen Gas. Er definiert dann für alle thermodynamischen Systeme die Entropie.

Schallgeschwindigkeit in Luft

2. Leiten Sie die Formel für die Schallgeschwindigkeit c in einem idealen Gas

$$c = \sqrt{\gamma\, p/\rho} \qquad (*)$$

her, indem Sie von der Kontinuitätsgleichung für die Dichte ρ, der Eulerschen Gleichung der Hydrodynamik für die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und der adiabatischen Druck–Dichte–Beziehung $p(\rho)$ ausgehen

$$\dot{\rho} + \mathrm{div}\,(\rho\vec{v}\,) = 0\;, \qquad \dot{\vec{v}} + (\vec{v}\,\nabla)\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\;, \qquad p\,\rho^{-\gamma} = \text{const.}$$

Rechnen Sie auch aus, wie groß die Schallgeschwindigkeit in Luft unter Normalbedingungen nach dieser Formel $(*)$ ist.

Hinweis: Um mit den drei angegebenen Gleichungen zum gewünschtem Resultat für die Schallgeschwindigkeit zu kommen, muß man sie linearisieren. Die Idee dabei ist, daß die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die zeitliche Dichteänderung $\dot{\rho}$ oder die räumliche Dichteänderung $\nabla\rho$ in einer Schallwelle klein sind.