

Übungen zur Thermodynamik

0. Blatt 14. April 2005

1. Die Wärmeleitungsgleichung hat die Form

$$D \Delta T - \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (*)$$

wobei die Temperatur $T(x, y, z, t)$ eine Funktion der Ortskoordinaten x, y, z und der Zeit t ist. Die Diffusionskonstante D vor dem Laplaceoperator $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ hat die Dimension $\text{Länge}^2/\text{Zeit}$ und ist durch $D = k/c$ gegeben. Die Wärmeleitfähigkeit ist k , d.h. der Wärmestrom \vec{j} ist proportional zum Gradienten der Temperatur $\vec{j} = -k \nabla T$, und c ist die spezifische Wärme.

- a) Leiten Sie die Wärmeleitungsgleichung (*) aus der Kontinuitätsgleichung für die Energie

$$\frac{du}{dt} + \text{div} \vec{j} = 0$$

her, wobei $u(x, y, z, t)$ die Energiedichte ist.

- b) Für den speziellen Fall, daß nur eine Ortskoordinate x wichtig ist, prüfen Sie nach, daß aus der Temperaturverteilung am Anfang zur Zeit $t = 0$

$$T(x, t = 0) = T_0 + T_1 e^{-x^2/\xi^2}$$

sich folgende zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils ergibt:

$$T(x, t) = T_0 + T_1 \sqrt{\frac{t_0}{t + t_0}} e^{-\frac{x^2}{4D(t+t_0)}} \quad (**)$$

mit der "Breite" $\xi = 2\sqrt{Dt_0}$ zur Zeit $t = 0$.

2. Es läßt sich mit Hilfe der kinetischen Gastheorie verstehen, daß der Druck eines idealen Gases durch den Aufprall seiner Moleküle auf die Gefäßwände entsteht. Der bei diesem Aufprall pro Flächeneinheit übertragene Impuls, d.h., es ist Druck = Kraft/Fläche, definiert den Druck p durch die folgende Formel

$$p = \frac{1}{3} \rho m \bar{v}^2 \quad (+)$$

Dabei ist $\rho = N/V$ die Partikeldichte, m der Partikelmasse und \bar{v}^2 der Mittelwert des Quadrates der Geschwindigkeiten \vec{v} der Partikel des Gases.

- a) Skizzieren Sie eine Ableitung dieser Gleichung (+).
b) Bestimmen Sie durch Vergleich mit der idealen Gasgleichung ($N_{Avogadro} k_B = R$)

$$pV = N k_B T,$$

wobei k_B die Boltzmannkonstante ist, die mittlere Geschwindigkeit eines Luftmoleküls bei 0° Celsius.

- c) Wie oft stößt ein Luftmolekül unter normalen Druckverhältnisse mit anderen zusammen? Geben Sie eine grobe Abschätzung.