

Soll zum besseren Verständnis der Übungsaufgabe von Blatt1 helfen.

Das Programm "diffusion.f" soll die statistische Seite dieses Problems zeigen.

Zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Reduziert auf eine Dimension hat die Wärmeleitungsgleichung die Form

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) T(x, t) = 0 . \quad (*)$$

Nimmt man eine δ -Funktion als Anfangswert der Temperaturverteilung T

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} ,$$

so läßt sich die zeitliche Entwicklung leicht bestimmen, denn $e^{ikx - Dk^2t}$ ist eine Lösung der Diffusionsgleichung (*) und damit ist auch

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx - Dk^2t} \quad \text{mit} \quad G(x, 0) = \delta(x) \quad (**)$$

eine Lösung. Das Integral ist leicht zu berechnen. Das Argument im Exponenten läßt sich als Quadrat schreiben

$$ikx - Dk^2t = -Dt \left(k - \frac{ix}{2Dt} \right)^2 - \frac{x^2}{4Dt} ,$$

so daß mit der Substitution $\tilde{k} = k - ix/(2Dt)$ das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx - Dk^2t} = e^{\frac{-x^2}{4Dt}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{k} e^{-Dt\tilde{k}^2} = \sqrt{\pi/(Dt)} e^{\frac{-x^2}{4Dt}}$$

ist. Schließlich ist mit (**)

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-x^2}{4Dt}} . \quad (***)$$

Mit dieser Lösung läßt sich die Zeitabhängigkeit jeder Temperaturverteilung $T_0(x)$ als Integral angeben

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - x', t) T_0(x') .$$

Die Greensche Funktion G löst damit dieses spezielle Anfangswertproblem der partiellen Differentialgleichung (*). Es ist eine Lösung bis auf "Quadraturen" oder Integrationen.