

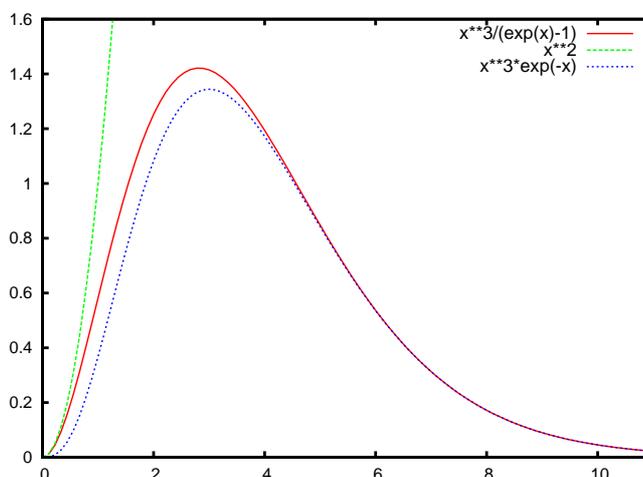
§1 Plancks Strahlung schwarzer Körper

Historisch ist die *Quantisierung* eines Feldes früher entwickelt worden, als die Quantenmechanik, d.h. die Quantisierung der Partikelmechanik. Die Quanten des Feldes, im Fall des elektromagnetischen Feldes den Photonen, konnte man Teilchencharakter zusprechen, ebenso wie Partikel Welleneigenschaften bekamen. Manchmal nennt man die Feldquantisierung auch *zweite* Quantisierung im Gegensatz zur *ersten* Quantisierung mit der SCHRÖDINGERGleichung oder der vorher diskutierten DIRACgleichung.

PLANCK hat folgende Formel für Energie E bzw, für die Energiedichte E/V gefunden

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{\exp(\frac{h\nu}{k_b T}) - 1} = \frac{8\pi^5 k_b^4}{15 h^3 c^3} T^4 = \frac{4\pi}{c} \sigma T^4 \quad (1)$$

die als Integral über die Frequenz ν , die genau vermessene Strahlungsdichte als Funktion der Frequenz $u(\nu)$ wiedergab. Der letzte Ausdruck ist die Strahlungsintensität $I = \sigma T^4$ mit der STEFAN-BOLTZMANN Konstante σ^\dagger und der Temperaturabhängigkeit $\propto T^4$. Dabei ist $k_b = 1,380 \cdot 10^{-16}$ erg/grad die BOLTZMANNkonstante und $h = 6,624 \cdot 10^{-27}$ erg-sec die PLANCKkonstante.



Die Planckverteilung als Funktion von $x=h\nu/k_b T$ zusammen mit dem Rayleigh-Jeans- & dem Wien-Gesetz.

Im folgenden soll erläutert werden, wie PLANCK etwa argumentierte*.

Planck und die Entropie eines Oszillators

Die Anzahl verschiedener Verteilung von P Energiequanten auf N Oszillatoren ist durch folgenden Formel gegeben

$$\binom{N+P-1}{P} = \frac{(N+P-1)!}{(N-1)! P!}$$

Wie prüft man diese Formel nach? Zunächst erhält man für $N = 1$ nur eine Möglichkeit und $P + 1$ für $N = 2$, was man auch erwarten würde. Mit $(P, 0)$, $(P - 1, 1)$, $(P - 2, 2)$, \dots $(0, P)$ hat man in der Tat $P + 1$ Möglichkeiten P Energiequanten auf 2 Oszillatoren zu verteilen. Daß die Formel auch für drei und mehr Oszillatoren richtig ist, kann man folgendermaßen sehen. Der Term z^P des folgenden Polynoms

$$(1+z)^{N+P-1} = 1 + \dots + \binom{N+P-1}{P} z^P + \dots + z^{N-1+P}$$

[†] Man gewinnt $\sigma = \frac{2\pi^4 k_b^4}{15 h^3 c^2} = 5,672 \cdot 10^{-5}$ erg/(cm² sec grad⁴) durch Integration mit $\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{\exp(x)-1} = 3! \zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$.

* Siehe hierzu: Res Jost, Das Märchen vom Elfenbeinernen Turm, Planck-Kritik des T. Kuhn, S. 67, Springer 1995.

hat den zu erklärenden Binomialkoeffizienten als Vorfaktor. Nimmt man $N = 3$ an, dann ist ein Term z^P durch Ausmultiplikation von $(1+z)^{2+P}$ entstanden, so daß er zwei Einsen enthält

$$z^{P_1} 1 z^{P_2} 1 z^{P_3} \quad \text{mit} \quad P_1 + P_2 + P_3 = P,$$

wobei die P_i eine spezielle Aufteilung der P Quanten auf die drei Oszillatoren geben. Nach dem Binominalformel gibt es davon $\binom{N+2+P}{P}$ Terme. Man braucht also $N-1$ "Einsen" um eine Aufteilung der Energie unter N Oszillatoren zu bekommen.

Mit der BOLTZMANNkonstanten k_b erhält man für die Entropie

$$S_N/k_b = \ln \binom{N+P-1}{P} \approx (N+P-1) \ln(N+P-1) - (N-1) \ln(N-1) - P \ln P$$

mit Hilfe der STIRLINGformel $\ln N! \approx N \ln(N/e)$ unter der Voraussetzung, daß N und P große Zahlen sind. Mit $P = E_{\text{gesamt}}/(h\nu)$, wobei E_{gesamt} die auf die N Oszillatoren zu verteilende Energie ist, bekommt mit $E = E_{\text{gesamt}}/N$ für den Quotienten $P/N = E/(h\nu)$ die mittlere Anzahl der Energiequanten pro Oszillator. Die Entropie pro Oszillator ist $S = S_N/N$ und nach der vorherigen Formel

$$\frac{S(E)}{k_b} = \left(\frac{E}{h\nu} + 1\right) \ln\left(\frac{E}{h\nu} + 1\right) - \frac{E}{h\nu} \ln\left(\frac{E}{h\nu}\right)$$

Dies ist PLANCKS Entropieformel für einen harmonischen Oszillator, die für große Energie $E \gg h\nu$ sich in die "klassische" Form

$$\frac{\tilde{S}(E)}{k} = \ln\left(\frac{E\epsilon}{h\nu}\right)$$

verwandelt. Mit der Formel $dS/dE = 1/T$ kann mit die Entropieformel von PLANCK in eine bekanntere Form umwandeln

$$\frac{1}{kT} = \frac{1}{h\nu} \ln\left(1 + \frac{h\nu}{E}\right) \Rightarrow \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 = \frac{h\nu}{E} \Rightarrow E = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (2)$$

Der entscheidende Schritt ist tatsächlich die Quantelung der Energie. Mit der Kombinatorik kann man mit Hilfe der Formel $S = k \ln W$ die Entropie bestimmen, so ähnlich wie man die Mischungsentropie bei Lösungen bestimmt, mit denen sich PLANCK vorher beschäftigt hatte, ehe er das Problem der Hohlraumstrahlung studiert hat...

Die Plancksche Formel

Um die Formel (1) zu bekommen, muß man nur die Beiträge der vielen Oszillatoren aufsummieren, wobei Gl.(2) der Beitrag eines einzelnen Oszillators ist. Die Oszillatoren zählt man am einfachsten in einem kubischen Hohlraum mit dem Volumen $L \times L \times L$. Die Wellenzahl-Vektoren der Schwingung sind $\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}$ mit $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ und $n_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ entsprechend periodischen Randbedingungen. Die zugehörige Frequenz ist $\nu = 2\pi c |\vec{k}|$. Alle Schwingungen bekommt man durch Summation über die ganzen Zahlen n_i , d.h.

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \dots \approx \int dn_1 \int dn_2 \int dn_3 \dots = 4\pi \int_0^\infty n^2 dn \dots = 4\pi (L/c)^3 \int_0^{\text{infy}} \nu^2 d\nu \dots \quad (3)$$

wobei \dots für die zu integrierende Funktion $h\nu/(e^{h\nu/kT} - 1)$ steht. Die zweite Umformung ist der Übergang zur Integration über den Radius $n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Da die Frequenz $\nu = cn/L$ ist ergibt sich die letzte Umformung daraus.

Formel (1) ist durch die letzten Form des Integrals (3) gegeben. Man muß nur noch berücksichtigen, daß es zwei Polarisierungen für jeden Zustand gibt und $L^3 = V$ ist.