NACHKLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2024/25, Montag, 7.4.25, 10:00 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Auf S. 3 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 5 / 6 / 5 / 6 Summe: 22 (bestanden ab 11 Punkten)

Beantworten Sie alles auf dem zusätzlich verteilten Papier! Unterstreichungen und Antworten auf dieser Vorlage werden nicht gewertet!

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Scheiben Sie folgende Dezimalzahlen als einfachen Bruch (p/q): (1 Punkt)

$$0.\bar{3}, \qquad 0.25, \qquad -7.1, \qquad 0.0001$$

b.) Schreiben Sie folgenden Doppelbruch als einfachen Bruch (p/q) und kürzen Sie soweit wie möglich: (0.5 Punkte)

$$\frac{3/4}{6/8}$$

c.) Berechnen Sie folgende Ausdrücke falls möglich und vereinfachen Sie so weit wie möglich. Ist dies nicht möglich, schreiben Sie "g.n." (geht nicht): (1 Punkt)

$$16^{3/4} \qquad \sqrt{3}+\sqrt{1} \qquad \ln(e^3) \qquad 8^{-1/3}.$$

d.) Gegeben ist eine stetig differenzierbare Funktion $f(x)$. Welche anschauliche/ geometrische Größe steckt in der 1. Ableitung $f'(x_0)$? Welche anschauliche/ geometrische Größe steckt im Integral $\int_a^b f(x)\,dx$? Erklären Sie beides anhand einer einfachen Skizze. (1 Punkt)

e.) Kürzen Sie so weit wie möglich (0.5 Punkte):

$$\frac{(x^2-4)}{x+2}$$

f.) Was sind die SI-Einheiten folgender Größen? (Einheitensymbol oder -name wird anerkannt, ebenso die Kombination mehrere SI-Einheiten) (1 Punkt)

(1) Kraft (2) Impuls (3) Beschleunigung (4) Energie

Aufgabe 2: Kraft, Masse, Geschwindigkeit, etc. (6 Punkte)

a_0 ist eine Einheitslänge und τ eine Zeitinheit. t ist die Zeit.

a.) Ein Körper der Masse m bewegt sich mit dem zeitabhängigen Ortsvektor:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a_0\, t/\tau \\ a_0\, t^2/\tau^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie seine Trajektorie in der xy-Ebene. (Für die Skizze (nur dort!) dürfen Sie der Einfachheit halber $a_0 = \tau = 1$ setzen.)

Markieren Sie, wo sich der Körper zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = \tau$ befindet. (1 Punkt) b.) Welche Kraft wirkt auf diesen Körper? (1 Punkt)

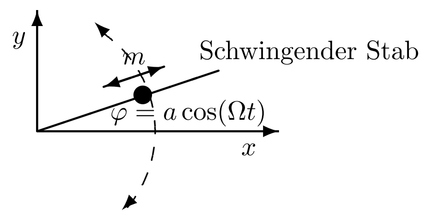
c.) Welchen linearen Impuls besitzt dieser Körper? (1 Punkt)

d.) Fallen alle Körper auf der Erde im Vakuum gleich schnell oder ist dies eine Definitionsfrage? Fällt ein Körper auf dem Mond genauso schnell wie ein Körper (im Vakuum) auf der Erde? (1 Punkt)

e.) Erklären Sie (in 1 bis 2 verständlichen Sätzen) den Unterschied zwischen träger und schwerer Masse. Sind beide gleich, verschieden, proportional zueinander oder ist dies eine Definitionsfrage? (Mit Begründungen) (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 3: Lagrangeformalismus: Perle auf schwingendem Stab: (5 Punkte)



m, Ω und a sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben sei eine (punktförmige) Perle auf einem Draht, der in der xy-Ebene hin- und herschwingt. Der Winkel φ zwischen Draht und x-Achse werde beschrieben durch $\varphi(t) = a\cos(\Omega t)$ (siehe Abbildung). Die Perle rutscht auf diesem schwingenden Stab.

Keine Reibungs- und keine Schwerkraft!

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie?

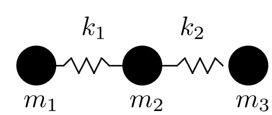
Wie lautet die Lagrangefunktion? (3 Punkte)

b.) Finden Sie die Bewegungsgleichung(en) dieses Problems. (2 Punkte)

Ersatz: Falls Sie a.) nicht geschafft haben, lösen Sie b.) mit folgender Ersatz-Lagrangefunktion (diese hat nichts mit dem eigentlichen Problem zu tun):

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}\,x^2 + ax^2.$$

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.



Aufgabe 4: Gekoppelte Schwingungen (6 Punkte)

Gegeben sind 3 Massen $m_1 = m_2 = m_3 = m$, die mit 2 elastischen Federn $k_1 = k_2 = 2k$ untereinander verbunden sind (siehe Skizze). Die Massen sind nicht an den Wänden befestigt, sondern können alle frei schwingen.

a.) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen dieser Anordnung und ordnen sie diese nach ihren Werten. (Neben ω wird im Folgenden auch ω^2 anerkannt.) (4 Punkte)

b.) Welches ist die niedrigste Eigenfrequenz? Beschreiben Sie in Worten, welche Bewegung der drei Massen Sie bei dieser Eigenfrequenz erwarten. (0.5 Punkte)

c.) Welches ist die höchste Eigenfrequenz? Berechnen Sie für diese auch die Schwingungsamplituden. (Ein Faktor bleibt dabei, wie gewohnt, unbestimmt.) Veranschaulichen sie das Amplitudenverhältnis anhand einer Skizze Ihrer Wahl. (1.5 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad\qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta),\ \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta, \qquad\qquad dV = r^2\, \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S \vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v \vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i \sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi| \exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s} \times \vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hamilton-Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

(Andere Elemente und Elemente bei kontinuierlicher Massenverteilung lassen sich daraus erschliessen.)

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_\alpha \Omega_\beta J_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$