KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2020/21, Donnerstag, 8.4.21, 10:00 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich erhaltene Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 7 / 8 / 7 / 4 Summe: 26 (bestanden ab 13 Punkten)

Aufgabe 1: Kraft und Arbeit (7 Punkte)

Alle Einheiten wurden hier der Einfachheit halber auf 1 gesetzt.

Gegeben sind die beiden Kraftfelder:

$$\vec{F}_1 = (xy^2,\, x^2y,\, \cos\frac{\pi z}{2}), \qquad \vec{F}_2 = (\dot{x},\, \dot{y},\, 0).$$

a.) Untersuchen Sie für beide Felder, ob sie konservativ sind. (Begründung und richtige Antwort sind beide punktrelevant). (2 Punkte)

b.) Wenn eines der Felder (oder beide) konservativ ist/sind, so bestimmen Sie dafür (jeweils) das Potenzial (potenzielle Energie). Nebenbedingung: An der Stelle $\vec{r} = (0, 0, 1)$ soll das Potenzial den Wert 0 besitzen. (2 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir nur noch das Kraftfeld $\vec{F}_1$:

c.) Welche Arbeit ist nötig, um eine Masse gegen das Kraftfeld $\vec{F}_1$ auf direktem Weg vom Punkt $\vec{r}_1 = (1, 2, 1)$ zum Punkt $\vec{r}_2 = (2, 1, 3)$ zu befördern? Muss die Arbeit aufgebracht werden oder wird sie frei? (2 Punkte)

d.) Welche Bedeutung hat der Begriff eines konservativen Kraftfeldes für die schiefe Ebene? (Erläutern Sie den Zusammenhang verständlich in 1-2 Sätzen.) (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 2: Bahngleichungen und Trajektorien (8 Punkte)

τ und v_0 sind positive Konstanten mit $\tau < 2v_0/g$. g ist die Beschleunigung an der Erdoberfläche.

Zwei Massenpunkte m_1 und m_2 werden im Schwerefeld der Erde senkrecht nach oben geworfen (eindimensionale Bewegung, die x- und y-Koordinaten sind 0 für beide Massen). Ihre Höhe über dem Erdboden werde durch die Koordinaten $z_1(t)$ und $z_2(t)$ ausgedrückt. Es gelte:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= v_0 t - \frac{g}{2}t^2 \\ z_2(t) &= v_0(t-\tau) - \frac{g}{2}(t-\tau)^2 \end{aligned}$$

a.) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0 und die Höhe z_0, wenn sich die beiden Massenpunkte treffen.

Welche Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in Abhängigkeit von den Konstanten g, v_0 und τ) besitzen beide Teilchen zu diesem Zeitpunkt? (3 Punkte)

b.) Skizzieren Sie beide Funktionen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ grob als Funkion von t **in das gleiche Koordinatensystem**. Es ist nur eine ungefähre Skizze ohne konkrete Zahlenangaben verlangt. Die Form der Kurven sowie eventuelle Ähnlichkeiten zwischen beiden Kurven müssen erkennbar sein. (2 Punkte)

Die folgenden Fragen können unabhängig von den anderen Teilaufgaben beantwortet werden:

c.) Wie lautet der Ortsvektor $\vec{r}_1(t)$ von m_1? (1 Punkt)

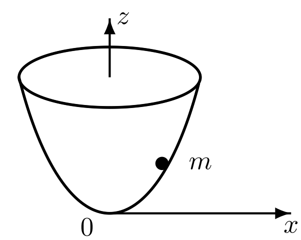
d.) Wie lautet die Bewegungsgleichung für m_1 (wahlweise in $d = 1$ für z_1 oder in $d = 3$)?
Hinweis: Die Bewegungsgleichung führt zur gegebenen Trajektorie. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Lagrange (7 Punkte)

Gegeben sei eine Punktmasse m, die in einem Paraboloiden unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei rutscht (siehe nebenstehende Abbildung).



Die Zwangsbedingung lautet in Zylinderkoordinaten:

$$z = r_\perp^2.$$

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie?
(1 Punkt)

b.) Wie lautet der Ortsvektor des Teilchens in Ihren gewählten Koordinaten?
Stellen Sie für dieses Problem die Lagrangefunktion auf. (2 Punkte)

c.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) nach Lagrange auf. (3 Punkte)

d.) Gibt es eine zyklische Koordinate?
Falls ja: Berechnen Sie die daraus folgende Erhaltungsgröße.
Falls nein: Nennen Sie mindestens eine Erhaltungsgröße (ohne Begründung).
(1 Punkt)

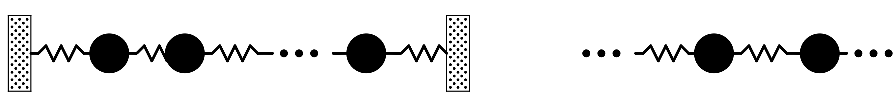
Sollten Sie b.) nicht geschafft haben, lösen Sie c.) und d.) bitte mit folgender Ersatzfunktion. (Diese hat mit der gestellten Aufgabe nichts zu tun):

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + y\dot{y}^2 + x\dot{z}^2\right) - mg\,xy.$$

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Gekoppelte Schwingungen (4 Punkte)

Gegeben ist ein gekoppeltes Masse-Feder-System. N: Anzahl der schwingenden Massen.



Mit 2 Wänden oder ohne Wände

Entscheiden Sie, ob die folgenden Sätze richtig oder falsch sind.

Ist ein Satz richtig, schreiben Sie hinter der Nummer r oder R.

Ist ein Satz falsch, schreiben Sie hinter der Nummer f oder F und den korrigierten Satz. Die Korrektur muss konstruktiv sein, d.h., nicht einfach durch Verneinung. Manchmal können Sie einfach etwas streichen, manchmal müssen Sie etwas ersetzen.

(Je 1 Punkt – insgesamt 4)

Nicht raten – für falsche Antworten gibt es Punktabzug (innerhalb dieser Aufgabe)!

1. Bei einer Kette mit N schwingenden Massen gibt es im Fall von 2 Wänden $N-1$ Eigenfrequenzen und ohne Wände $N+1$ Eigenfrequenzen.
2. Gekoppelte Schwingungen führen zu einer reellen symmetrischen Matrix, bei der alle Matrixelemente ungleich Null sind.
3. In einer Eigenfrequenz schwingen alle Massen gleichzeitig nach rechts bzw. gleichzeitig nach links.
4. Die schwingenden Saite besitzt eine kleinste Frequenz, aber keine größte Frequenz.

FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z \quad \text{(müssen Sie kennen).}$$

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad\qquad dV = r_\perp \, dr_\perp \, d\varphi \, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r \cos\vartheta$

$$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \; \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \; \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta, \qquad\qquad dV = r^2 \, \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung:$\vec{F}_G = -\mu_G |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S \vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v \vec{v}$.

Die weiteren Standardkräfte und ihre Potenziale müssen Sie kennen.

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i \sin[\lambda t]$

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T, \quad \text{Oszillator:} \quad \omega_0^2 = k/m, \quad \text{Pendel:} \quad \omega_0^2 = g/\ell$$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi| \exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \operatorname{Re}\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \operatorname{Im}\chi = \frac{1}{2}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\chi}{\operatorname{Re}\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x \, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y \, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z \, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s} \times \vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$