AUFGABEN DER NACHKLAUSUR ZUR THEO. PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2018/19, Dienstag, 2.4.19, 14:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 7 / 5 / 6 / 7 Summe: 25 (bestanden ab 12.5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (7 Punkte)

1. Berechnen Sie alle Ausdrücke, die eine natürliche Zahl als Ergebnis haben. Schreiben sie bei den anderen "geht nicht". Nicht raten: falsche Antworten ergeben Minuspunkte (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

$$\text{(i)} \quad (4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3}), \qquad \text{(ii)} \quad \sqrt{3}+\sqrt{6}, \qquad \text{(iii)} \quad 1/5+8/10, \qquad \text{(iv)} \quad 27^{1/3}$$

2. Ein Schwimmbecken der Grundfläche von $500\,m^2$ ist bis zu einer Höhe von $2\,m$ mit Wasser gefüllt. Eine Person von $50\,kg$ Körpergewicht springt aus einer Höhe von $2\,m$ hinein. Um wieviel Kelvin erwärmt sich dadurch das Wasser, wenn ihre potenzielle Energie vollständig in Wärme umgewandelt wird?

Hinweise: Nehmen Sie die Erdbeschleunigung an als $g = 10m/s^2$.
Die spezifische Wärme von Wasser beträgt etwa $c = \Delta Q/(m \cdot \Delta T) = 4\,kJ/(kg \cdot K)$.
$1\,m^3$ Wasser hat die Masse von $1000\,kg$. (1,5 Punkte)

3. Ein Auto überquere den 20.-ten Breitengrad nördlicher Breite von Norden nach Süden.

Skizzieren Sie die Erde (entweder perspektivisch in 3D oder in 2D als Großkreis entlang eines Längengrades). Skizzieren Sie die Winkelschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Erde. Markieren Sie Nord- und Südpol sowie den 20.-ten Breitengrad nördlicher Breite (nicht maßstabsgetreu). Skizzieren Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Autos und berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{\omega}$ und $\vec{v}$. (2 Punkte – mit stichpunktartigen Erläuterungen)

4. Gegeben ist ein ideales Gas von Volumen V und Druck p. Die Temperatur T sowie die Teilchenzahl N seien konstant. Skizzieren Sie V als Funktion von p. (1 Punkt)

5. Berechnen Sie: (0.5 Punkte)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Sind die folgenden vier Größen **Vektoren** aus R^3? ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Vektoren aus R^3.) Bitte beantworten Sie auch dies auf dem zusätzlich verteilten Papier! (mit: ja / nein) (1 Punkt)

a.) Entropie, b.) Arbeit, c.) $\vec{a} \times \vec{b}$, d.) $|\vec{a}\,|$
Nicht raten! Falsche Antworten ergeben Minuspunkte (innerhalb dieser Teilaufgabe).

Aufgabe 2: Kraft und Arbeit (5 Punkte) (Alle Einheiten wurden zur Vereinfachung auf 1 gesetzt.)

a.) Gegeben ist das Kraftfeld

$$\vec{F}_1 = (x^2+1)\,\vec{e}_y.$$

Skizzieren Sie das Kraftfeld für $y \geq 0$ in ein xy-Koordinatensystem (in beide Quadranten).

Markieren Sie in der Skizze einen nichtgeschlossenen Weg, entlang dem $dW_1 = -\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$ überall Null wäre. Begründen Sie kurz Ihre Wahl. (2 Punkte)

b.) Gegeben ist das Kraftfeld: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, mit $\vec{F}_1$ wie oben und

$$\vec{F}_2 = (y^2, y^2 - x^2, 0).$$

Berechnen Sie die Arbeit W, um im Kraftfeld $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ einen Körper auf direktem Weg vom Punkt $P = (0,0,0)$ zum Punkt $Q = (1,2,0)$ zu befördern. (2 Punkte)

c.) Was lässt sich über die **Arbeit** in einem konservativen Kraftfeld aussagen? Antworten Sie möglichst genau und verständlich. (Es gibt mehrere Antworten. Eine davon reicht.) (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Differenzialgleichung: Zerfallsprozess (6 Punkte)

N ist eine Konstante mit positivem Wert.

a.) Gegeben ist eine Größe $n(t)$ (z.B. eine Teilchenzahl), die zu Beginn ($t = 0$) den Wert N hat und im Laufe der Zeit abnimmt. Ihre Änderung mit der Zeit t sei dabei stets proportional zum jeweils momentanen Wert von $n(t)$.

Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf für den Zerfall der Größe $n(t)$ und definieren Sie notwendige Konstanten selbst. (2 Punkte)

[Wenn Ihre DGL falsch ist, werden die folgenden Teilaufgaben dennoch gewertet und auf Ihre DGL bezogen.]

b.) Ist die Bewegungsgleichung aus i.) homogen? ii.) linear? iii.) gewöhnlich? (iv) Welcher Ordnung ist sie? (Ohne Begründung, aber mit Punktabzug bei falschen Teilantworten) (1 Punkt)

c.) Lösen Sie diese DGL und passen sie die Lösung an die Bedingungen aus a.) an. (2 Punkte)

d.) Skizzieren Sie $n(t)$ und $\dot{n}(t) = dn/dt$ als Funktionen von t (entweder getrennte Skizzen oder eindeutige Beschriftung!) Beschriften Sie die Achsen und geben Sie die Werte von eventuellen Schnittpunkten der Funktionen mit den Achsen an. (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

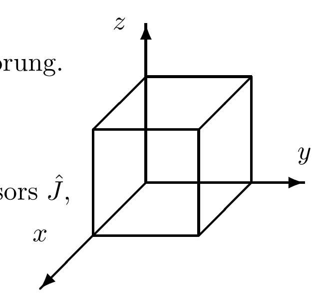
Aufgabe 4: Rotation und Trägheitstensor (7 Punkte)

Ω_0, a und ρ_0 sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist ein Würfel der Seitenlänge a mit dem Koordinatenursprung in der linken, hinteren unteren Ecke (siehe Skizze). Er habe die Dichte

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \frac{xy}{a^2}.$$

Im Folgenden geht es um den Trägheitstensor $\hat{J}$ in Bezug auf den Koordinatenursprung.



a.) Ergänzen Sie die Werte aller Elemente J_{ij}, etc. $i, j, \in \{x, y, z\}$ des Trägheitstensors $\hat{J}$, die noch nicht gegeben sind: (3 Punkte)

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ -\frac{1}{9}\rho_0 a^5 & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & \frac{1}{4}\rho_0 a^5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Einige Elemente lassen sich ohne Rechnung erkennen. In diesem Fall ist keine Begründung verlangt. Falsch geratene Ergebnisse geben jedoch einen extra Punktabzug!

b.) Welche Rotationsenergie T_{rot} besitzt der Würfel bei einer Rotation (Winkelgeschwindigkeit Ω_0) um eine durch den Bezugspunkt gehende Achse in Richtung von $(a, 0, 2a)$? (2 Punkte)

Jetzt eine neue Anordnung ohne den Würfel:

c.) Gegeben sind drei Punktmassen m_0, zu Beginn an den Orten $\vec{r}_1 = (-a, 0, 0)$, $\vec{r}_2 = (0, 0, 0)$, $\vec{r}_3 = (a, 0, 0)$. Sie sind starr durch masselose Stangen miteinander verbunden.

Diese Anordnung soll nun mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_0 um die z-Achse rotieren. Wie groß ist dabei die (gesamte) Rotationsenergie T_{rot}? (2 Punkte – mit Rechnung/stichpunktartigen Erläuterungen)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen.

FORMELSAMMLUNG (darf abgerissen werden)

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi, \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2, \qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2\,\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}$.

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}$.

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T$, Oszillator: $\omega_0^2 = k/m$, Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \operatorname{Re}\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \operatorname{Im}\chi = \frac{1}{2}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\chi}{\operatorname{Re}\chi}$$

Arbeit:

$$W_{21} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad \text{Potenzial (potenzielle Energie):} \quad V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$V = -\int^x F_x\, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i,$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_\alpha\Omega_\beta J_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$