# NACHKLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

**Wintersemester 2017/18, Freitag, 13.4.18, 10:15 Uhr**

**Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!**
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
**Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)**
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 4 / 5 / 5 / 4 / 5 Summe: 23 (bestanden ab 11.5 Punkten)

---

**Aufgabe 1: Grundwissen (4 Punkte)**

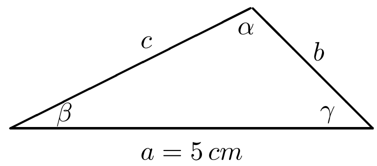
1. Gegeben ist eine Kugel vom Radius $R$. Wie groß ist ihre Oberfläche $A$? Wie groß ist das Kugelvolumen $V$? (1 Punkt)

2. Wie viele Nullstellen besitzen die folgenden Funktionen in ihrem Definitionsbereich $x \in ]-\infty, \infty[$? (1 Punkt)

$$f_1(x) = x^2 - 1, \qquad f_2(x) = (x+1)^2, \qquad f_3(x) = (x+1)^2 + 1, \qquad f_4(x) = -x^2 + 1.$$

3. Gegeben ist ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha = 90°$, $\beta$, $\gamma = 53,12°$ und den Seiten $a = 5\,cm$, $b$, $c$ (siehe Skizze – diese ist nicht maßstäblich!). Wie groß sind die beiden Seiten Seiten $b$ und $c$ sowie der Winkel $\beta$? (1 Punkt)

Hilfen: $\sin\gamma = 0.80$, $\cos\gamma = 0.60$




4. Sind die folgenden vier Größen **Vektoren** aus $R^3$? Bitte beantworten Sie auch dies auf dem zusätzlich verteilten Papier! (mit: ja / nein) (1 Punkt)

a.) Impuls,

b.) Drehimpuls,

c.) Drehmoment

d.) Drehwinkel

**Aufgabe 2: Kraft, Arbeit und Potenzial (5 Punkte)**

(Die Größen sind absichtlich dimensionslos gehalten, d.h. die Einheitsgrößen $F_0$, $V_0$ und $a$ wurden auf 1 gesetzt und spielen für die Rechnungen keine Rolle.)

**Zu a.) und b.) Keine Begründung verlangt, aber falsche Antworten führen zu Punktabzug!**

a.) Zwei Körper der Massen $m$ und $M$ mit $M > m$ fliegen unter dem gegenseitigen Einfluss der Gravitationskraft **aufeinander zu**. (Sonst sollen keine Kräfte wirken.)

(i) Auf welchen Körper wirkt die **größere** Kraft? (Mögliche Antworten: $m$, $M$, kein Unterschied).

(ii) Welcher Körper wird stärker beschleunigt? (Mögliche Antworten: $m$, $M$, kein Unterschied).
(1 Punkt – je 1/2)

b.) Zwei Körper der Massen $m$ und $M$ mit $M > m$ fallen unter dem Einfluss der Gravitationskraft **auf die Erde zu**. (Die gegenseitige Anziehung der beiden Körper sei hier vernachlässigbar und außer der Erdanziehung sollen keine Kräfte wirken.)

(i) Auf welchen Körper wirkt die **größere** Anziehungskraft der Erde? (Mögliche Antworten: $m$, $M$, kein Unterschied).

(ii) Welcher Körper kommt schneller auf der Erde an, wenn beide gleichzeitig aus gleicher Höhe aus der Ruhe heraus losgelassen werden? (Mögliche Antworten: $m$, $M$, kein Unterschied). (1 Punkt – je 1/2)

**Aufgabe 2, Fortsetzung:**

c.) Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F} = (\cos(y), -\sin(y), 1)$$

Ein Körper soll in diesem Kraftfeld auf direktem Weg vom Punkt $(\pi, \pi, 0)$ zum Punkt $(2\pi, 2\pi, \pi)$ befördert werden. Welche Arbeit wird dabei verrichtet? Muss sie aufgebracht werden oder wird sie frei? (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**Aufgabe 3: Differenzialgleichungen (5 Punkte)**

a.) Erklären Sie anhand eines einfachen mechanischen Beispiels Ihrer Wahl, was eine Bewegungsgleichung ist und wie man mit Hilfe der Newton'schen Axiome eine Bewegungsgleichung aufstellen kann. (Es muss erkennbar sein, welches Problem in Ihrem Beispiel dargestellt wird.) (2 Punkte)

b.) Lösen Sie folgende Differenzialgleichung für $x(t)$

$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 7x = t + 1.$$

(Anfangsbedingungen sind nicht gegeben – entsprechende Konstanten dürfen daher in der Lösung stehen bleiben). (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne die Ersatzfunktion (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**Aufgabe 4: Corioliskraft (4 Punkte)**

Ein Auto der Masse $100\,kg$ überquert den 60.-ten Breitengrad nördlicher Breite von Süden nach Norden mit einer Geschwindigkeit von $100\,km/h$.

a.) Skizzieren Sie die Erde, den Vektor ihrer Winkelgeschwindigkeit und den Winkel $\varphi$, der den Breitengrad definiert. Zeigen Sie die Himmelsrichtungen N/ S/ O/ W.

Markieren Sie den Ort des Autos und zeigen Sie dessen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$.

Die Beschriftungen müssen verständlich und evt. durch 1-2 Sätze verdeutlicht sein. (2 Punkte)

b.) Wie groß ist die Corioliskraft $\vec{F} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$, die auf dieses Auto wirkt in Betrag (angegeben in Newton) und Richtung? Beschreiben Sie die Richtung in Begriffen wie Nord, Süd, Ost, West, zum Erdboden hin, von der Erdachse weg, etc. (mit Begründung!)

Hilfen: Setzen Sie $\pi \approx 3$ und $3600^2 \approx 13 \cdot 10^8$.

(2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**Aufgabe 5: Trägheitstensor (5 Punkte)**

Gegeben ist ein Zylinders der Höhe $H$, des Radius $R$, mit der $z$-Achse als Symmetrieachse, dem Boden in der $xy$-Ebene mit der Massendichte $\rho_V = \rho_0\, r_\perp^2/R^2$.

Wir betrachten den Trägheitstensor in Bezug auf den Koordinatenursprung.

a.) Berechnen Sie das Trägheitsmoment $J_{xx}$. (3 Punkte)

Hilfen (Sie werden nicht alle Integrale brauchen!): $\int \sin^2 x\,dx = x/2 - \sin(2x)/4 + c$,
$\int \cos^2 x\,dx = x/2 + \sin(2x)/4 + c$, $\int \sin^3 x\,dx = -\cos(x) + \cos^3 x/3 + c$

b.) Der Zylinders soll nun um eine Achse rotieren, welche die Winkelhalbierende von $x$- und $y$-Achse ist. Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit sei $\Omega = 2\pi/\tau$ mit der konstanten Zeiteinheit $\tau$.

Skizzieren Sie den Zylinder und die Rotationsachse.

Wie lautet der Vektor $\vec{\Omega}$ dieser Rotation? Wie groß ist die kinetische Energie bei dieser Rotation? (Sie dürfen voraussetzen, dass alle Deviationsmomente gleich Null sind.) (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**FORMELSAMMLUNG (darf abgerissen werden)**

**Zylinderkoordinaten:** $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi, \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2, \qquad dV = r_\perp \, dr_\perp \, d\varphi \, dz$$

**Kugelkoordinaten:** $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r \cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta \sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2 \, \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S \vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v \vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i \sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

**Komplexe Zahlen:**

$$\chi = |\chi| \exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \operatorname{Re}\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \operatorname{Im}\chi = \frac{1}{2}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\chi}{\operatorname{Re}\chi}$$

**Arbeit:**

$W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$ Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x \, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y \, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z \, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s} \times \vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

**Analytische Mechanik:**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

**Wellengleichung:**

$$\frac{d^2 z(x,t)}{dt^2} = c^2 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}, \quad c^2 = T/\rho_\ell, \quad \omega = kc.$$

**Hilfen zum Trägheitstensor:**

$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_\alpha \Omega_\beta \hat{J}_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$