NACHKLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2016/17, Mittwoch, 19.4.17, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 3 / 5 / 6 / 4 / 6 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (3 Punkte)

1. Schreiben Sie folgende Ausdrücke soweit möglich als natürliche Zahl und schreiben Sie "Geht Nicht", wenn das Ergebnis keine natürliche Zahl ist: (0.75 Punkte)

$$\begin{array}{ll} (a) & 2^{1/2} + 2^{1/2} \\ (b) & 3^{1/3}\, 3^{2/3} \\ (c) & \ln(\mathrm{e}^2) \end{array}$$

2. Schreiben Sie als gewöhnlichen Bruch (0.25 Punkte):

$$3\,\frac{1}{2} : \frac{3}{4} =$$

3. Bestimmen Sie einen Tangentenvektor $\vec{t}$, der sich im Punkt $(x, y) = (1, 1)$ an den Graph der Funktion $f(x) = x^3$ legen lässt. (Mehrere Antworten sind möglich). (0.5 Punkte)

4. Welchen Winkel (in Grad oder Bogenmaß) schließen die Vektoren $\vec{A} = (4, \sqrt{20}, 0)$ und $\vec{B} = (3, 0, \sqrt{7})$. miteinander ein? (0.5 Punkte)

5. Sind die folgenden vier Größen **Vektoren** aus R^3? Bitte beantworten Sie auch dies auf dem zusätzlich verteilten Papier! (mit: ja / nein).
a.) **Hauptträgheitsmoment,** b.) **Deviationsmoment,** c.) **Drehmoment,** d.) **Drehimpuls.**
(1 Punkt)

Aufgabe 2: Kraft, Potenzial und Energie (5 Punkte)

In (a-b) wurden alle Einheiten hier der Einfachheit halber auf 1 gesetzt.

a.) Gegeben ist das konservative Kraftfeld:

$$\vec{F} = (yz + \pi\cos(\pi x),\ xz,\ xy).$$

Bestimmen Sie das zugehörige Potenzial unter der Nebenbedingung $V(0, 0, 0) = 1$. (2 Punkte)

b.) Welche Arbeit W müssen Sie verrichten, um eine Masse auf direktem Weg vom Punkt $(1, 0, 2)$ zum Punkt $(3, 0, 0)$ zu befördern? (1 Punkt)

c.) Ein Körper der Masse M fliegt ohne weitere Einwirkung durch ein Kraftfeld mit dem Potenzial $V = xy\,V_0$. Am Punkt $\vec{r}_1 = (1, 1, 2)$ besitze er die kinetische Energie T_1. Welche kinetische Energie T_2 besitzt er am Punkt $\vec{r}_2 = (3, 1, 0)$? (1 Punkt)

d.) Gegeben ist der Trägheitstensor in Bezug auf den Koordinatenursprung. (M und R sind Konstanten, die Werte von k, m und n können Sie sich selbst erschliessen).

$$\hat{J} = MR^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 2 & 1 \\ m & n & 3 \end{pmatrix}$$

Wie groß ist die kinetische Energie (Rotationsenergie) des betreffenden Körpers, wenn er mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_0 um eine Achse rotiert, welche die Winkelhalbierende von x- und z-Achse bildet?
(1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Bewegung von Punktteilchen (6 Punkte)

Gegeben ist ein Punktteilchen mit dem zeitabhängigen Ortsvektor (x_0 und ω sind Konstanten):

$$\vec{r}(t) = x_0\ (\cos(\omega t),\, \sin(\omega t),\, 0)$$

a.) Skizzieren Sie die beschriebene Trajektorie in ein xy-Koordinatensystem. Markieren Sie den Startpunkt (bei $t = 0$) und die Bewegungsrichtung. (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Teilchens als Funktion von t. (1 Punkt)

c.) Zeichnen Sie Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zum Zeitpunkt $t = \pi/\omega$ an die Trajektorie. (0.5 Punkte)

d.) Berechnen Sie die Kraft, die auf das Teilchen wirkt (als Funktion von t). (0.5 Punkte)

e.) Welche Corioliskraft wirkt auf ein Auto der Masse $m = 1000\,kg$, das auf der Erde den 30. Breitengrad (wahlweise nördlicher oder südlicher Breite) von Süden nach Norden mit einer Geschwindigkeit von $24\,m/s$ überquert?

Berechnen Sie näherungsweise den Betrag der Kraft (mit Einheit!) und runden Sie benötigte Größen (soweit erforderlich), z.B. $\pi \approx 3$. Wirkt die Corioliskraft nach Osten, Westen, Norden oder Süden? (Mit Begründung!)

Verdeutlichen Sie Ihre Rechnung anhand einer Skizze der Erde, aus der $\vec{v}$, $\vec{\omega}$, R, das Auto, der Breitengrad und die Himmelsrichtungen (markiert als: N, S, O, W) klar hervorgehen. Falls Sie ein Koordinatensystem einführen, muss auch dieses klar definiert sein. (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Newton und Zwangsbedingungen (4 Punkte)

a.) Gegeben ist ein Punktteilchen der Masse m, das unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einer Schiene rutscht ohne diese verlassen zu können). Die Schiene hat die Form:

$$z(x) = \ln(x)$$

(mit $x > 0$). Skizzieren Sie die Schiene, das Teilchen und darauf wirkenden Kräfte in ein Koordinatensystem. Die Skizze kann "Frei Hand" erstellt werden, jedoch müssen Nullpunkt(e) und asymptotisches Verhalten erkennbar sein. (1 Punkt)

b.) Stellen Sie die Newton'schen Bewegungsgleichungen komponentenweise für dieses Problem auf und führen Sie diese über in so viele Gleichungen, wie es der Zahl der Freiheitsgrade entspricht. Sie müssen diese Bewegungsgleichung jedoch nicht mehr besonders vereinfachen oder umformen! (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 5: Thermodynamik (6 Punkte)

a.) Was ist die Bedeutung der mikrokanonischen Zustandssumme Ω? Erklären Sie die Bedeutung von

$$S = k_B \ln \Omega$$

(zur Definition der Entropie) anhand eines selbstgewählten Beispiels. Wann ist in Ihrem Beispiel die Entropie groß und wann ist sie klein, wann ist sie gleich Null? (2 Punkte)

b.) Ein ideales Gas aus N Teilchen ($N = konst$) besitze die Anfangstemperatur T_1. Sie erhalten die Anweisung, das Gas (i) isotherm, (ii) isochor und (iii) isobar vom Volumen V_1 auf V_2 zu expandieren. Eine der 3 Anweisungen ist unmöglich. Welche? (Mit Begründung!) (1 Punkt)

c.) Bei reversibler Prozessführung beträgt die Arbeit

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p\, dV.$$

Berechnen Sie die Arbeit W, die jeweils in den beiden verbleibenden Möglichkeiten aus b.) anfällt als Funktion von N, T_1, V_1, V_2 sowie Konstanten. (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den "Ersatz" (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG (darf abgerissen werden)

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi, \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2, \qquad dV = r_\perp \, dr_\perp \, d\varphi \, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r \cos\vartheta$

$$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2 \, \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\rm rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S \vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v \vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i \sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi| \exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit:

$W_{21} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$ Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x \, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y \, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z \, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s} \times \vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Analytische Mechanik:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Wellengleichung:

$$\frac{d^2 z(x,t)}{dt^2} = c^2 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}, \quad c^2 = T/\rho_\ell, \quad \omega = kc.$$

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_\alpha \Omega_\beta \hat{J}_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$