KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2024/25, Montag, 17.2.25, 10:00 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Auf S. 3 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 5 / 6 / 8 / 5 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Beantworten Sie alles auf dem zusätzlich verteilten Papier! Unterstreichungen und Antworten auf dieser Vorlage werden nicht gewertet!

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichungen: (1 Punkt)

$$(1)\, x^2 + 6x + 9 = 4, \qquad (2)\, x^2 x^3 = 32$$

b.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{A} = (1, -1, 2)$ und $\vec{B} = (0, 2, 1)$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aufgaben mathematisch sinnvoll definiert sind und lösen Sie diese :

$$(1)\, 3 + \vec{A} = , \quad (2)\, 3\vec{A} = , \quad (3)\, \vec{A} \cdot \vec{B} = , \quad (4)\, \vec{A} : \vec{B} =$$

(1 Punkt)

c.) Zwei fiktive Planeten A und B umrunden eine gemeinsame Sonne. A braucht 1 Jahr für eine Umrundung. Seine große Halbachse hat die Länge $1\,AE$ (astronomische Einheiten). B braucht 8 Jahre für eine Umrundung. Wie groß ist die große Halbachse von Planet B? (1 Punkt)

d.) Wie lautet die Geradengleichung für eine Gerade der Steigung 3, die durch den Punkt $(x/y) = (0/2)$ geht? (1 Punkt)

e.) Kürzen Sie so weit wie möglich (1 Punkt):

$$\frac{(x+3)^2}{x^2 - 9}$$

Aufgabe 2: Kraft und Potenzial (6 Punkte)

F_0 ist eine Einheitskraft, a eine Einheitslänge.

Gegeben ist die Kraft

$$\vec{F} = \frac{F_0}{a}(-y, x, z + a).$$

a.) Ist dieses Kraftfeld konservativ (mit Begründung/Rechnung)? (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie die Arbeit, um einen Körper gegen dieses Kraftfeld auf direktem Weg vom Punkt $(0, a, a)$ zum Punkt $(a, 2a, 0)$ zu befördern. (2 Punkte)

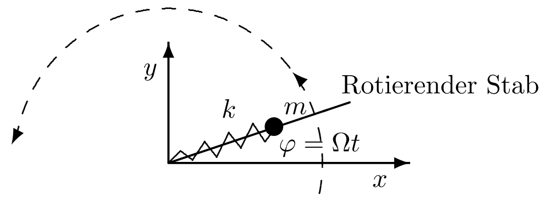
c.) Kann sich die benötigte Arbeit ändern, wenn Sie den Körper auf einem anderen als dem direkten Weg vom Punkt $(0, a, a)$ zum Punkt $(a, 2a, 0)$ befördern? Begründen Sie (kurz) Ihre Antwort. (1 Punkt)

d.) Erklären Sie anschaulich (in 1 bis 2 verständlichen Sätzen), wie (in welcher Situation) es zu einer Schein- oder Trägheitskraft kommt. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Lagrangeformalismus und Bewegungsgleichung (8 Punkte)



k, m, ℓ_0, C und a sind Konstanten mit positivem Wert.

Gegeben sei eine (punktförmige) Perle der Masse m an einem harmonischen Oszillator der Federkonstanten k. Die entspannte Feder hat die Länge ℓ_0. Der Oszillator ist am Ursprung befestigt und über einen Draht gelegt, der in der xy-Ebene rotiert (siehe Abb.). Der Winkel φ zwischen Draht und x-Achse werde beschrieben durch $\varphi(t) = \Omega t$ mit $\Omega^2 > k/m$.

Keine Reibungs- und keine Schwerkraft!

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie? (0.5 Punkte)

b.) Finden Sie die Lagrangefunktion für die Perle. (2 Punkte)

c.) Finden Sie die Bewegungsgleichung(en) dieses Problems. (1.5 Punkte)

[Ersatz, falls Sie b.) nicht geschafft haben, siehe unten.]

Hinweis: Die Bewegungsgleichung (auch falls Sie mit dem Ersatz rechnen) ist inhomogen.

d.) Lösen Sie die Bewegungsgleichung(en). Anfangsbedingungen sind nicht gegeben. Lassen Sie daher entsprechende Konstanten in der Lösung stehen. (Beachten Sie die Bedingung $\Omega^2 > k/m$!) (2 Punkte)

[Ersatz, falls Sie c.) nicht geschafft haben, siehe unten.]

e.) Welche Scheinkraft (eine reicht!) tritt im Bezugssystem der Perle auf? Welche Bewegung der Perle erwarten Sie wenn für die Konstanten gilt: $\Omega^2 < k/m$? Begründen Sie Ihre Erwartung. (2 Punkte)

[* Ersatz, falls Sie einige Teilaufgaben nicht geschafft haben (ansonsten ignorieren Sie bitte diesen Part):

Sollten Sie b.) nicht geschafft haben, lösen Sie c.) mit folgender Ersatz-Lagrangefunktion (diese hat nichts mit dem eigentlichen Problem zu tun):

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + ax^2 - Cx.$$

Falls Sie c.) nicht geschafft haben, lösen Sie folgende DGL für $x(t)$. (Sie hat nichts mit der angegebenen Ersatz-Lagrangefunktion oder dem Ursprungsproblem zu tun):

$$\ddot{x} + \dot{x} - 12x + 6t = 0.$$

*]

1 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Masse und Schwerpunkt (5 Punkte)

ρ_0 und a sind Konstanten mit positivem Wert.

Gegeben ist ein Würfel der Seitenlänge a mit der linken unteren hinteren Ecke im Koordinatenursprung, d.h. $x, y, z \in [0, a]$.

a.) Die Dichte des Würfels sei konstant, $\rho = \rho_0$. Wie groß ist die Masse M des Würfels und wo liegt sein Schwerpunkt? (1 Punkt)

b.) Die Dichte des Würfels sei $\rho = \rho_0\, x^2 y/a^3$. Berechnen Sie wieder Masse M und Schwerpunkt. (4 Punkte)

Einzelergebnisse, die Sie raten können, werden anerkannt, sofern Sie einen Stichpunkt als Erklärung geben.

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad dV = r_\perp \, dr_\perp \, d\varphi \, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r \cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta),\ \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2 \, \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\rm rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}$.

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G |\vec{F}_\perp| \dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S \vec{v}$
Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}$.

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i \sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi| \exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x \, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y \, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z \, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s} \times \vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hamilton-Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

(Andere Elemente und Elemente bei kontinuierlicher Massenverteilung lassen sich daraus erschliessen.)

$$T_{\rm rot} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_\alpha \Omega_\beta J_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$