KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2021/22, Dienstag, 8.2.21, 10:00 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Auf S. 4 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 7 / 8 / 6 / 8 Summe: 29 (bestanden ab 14,5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (7 Punkte)

a.) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem: (1 Punkt)

$$\begin{array}{ll} (1) & 3x - y = y - 3x + 1 \\ (2) & 2x + y = 2 \end{array}$$

b.) Ein Körper mit großer Masse M und einer mit kleiner Masse m werden über der (ebenen) Erdoberfläche gleichzeitig und aus gleicher Höhe im Vakuum losgelassen. Welche Aussagen sind richtig? - Sie können hinter die Nr. jeweils "r" oder "f" (richtig/falsch) schreiben. (Nicht raten: Punktabzug für falsche Antworten) (1 Punkt)

(1) Der Körper mit größerer Masse M kommt zuerst am Erdboden an.

(2) Der Körper mit kleinerer Masse m kommt zuerst am Erdboden an.

(3) Beide Körper kommen gleichzeitig am Erdboden an.

(4) Beide Körper schweben.

c.) Auf einen Körper der Masse m wirken die folgenden Kräfte:

$$\vec{F}_1 = -kz\,\vec{e}_z, \quad \vec{F}_2 = -mg\,\vec{e}_z.$$

mit der Federkonstanten k, der Erdbeschleunigung g und der Ortsvariablen z. Welches Problem wird hier beschrieben? (Vollständige Skizze oder Benennung des Problems). (2 Punkte)

d.) Kürzen Sie so weit wie möglich: (1 Punkt)

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$$

e.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{A}, \vec{B} \quad \text{und} \quad \vec{C} \quad \text{sowie die Skalare} \quad a, b.$$

Sind die folgenden Ausdrücke wohldefiniert oder nicht? (Schreiben Sie für jeden Ausdruck deutlich "ja" oder "nein" ohne Begründung. (Nicht raten: Punktabzug für falsche Antworten)
(2 Punkte)

$$(1)\, \vec{A} \cdot \vec{B} + a, \quad (2)\, \vec{A} \times \vec{B} + a, \quad (3)\, ab\vec{A} + \vec{C}, \quad (4) \quad a + \vec{A}$$

Bitte wenden

Aufgabe 2: Kraft, Arbeit und Potenzial (8 Punkte)

A, a und Ω sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben sind folgende Kraftfelder:

$$\vec{F}_1 = A\,\sin(\Omega t)\cos(ax)\,\vec{e}_x, \qquad \vec{F}_2 = \left(x(x^2+y^2),\, y(x^2+y^2),\, z^3\right)\,a^{-3}.$$

a.) Untersuchen Sie für beide Felder, ob sie konservativ sind und begründen Sie Ihre Antwort. (1.5 Punkte)

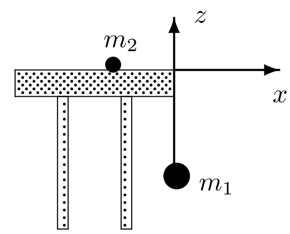
b.) Falls in a.) ein oder beide Kraftfelder konservativ sind, bestimmen Sie deren Potenzial (potenzielle Energie) V unter der Nebenbedingung $V(0,0,0) = 2Aa$. (2.5 Punkte)

c.) Berechnen Sie die anfallende Arbeit, um im Kraftfeld $\vec{F}_2$ einen Körper vom Punkt $(0,a,a)$ zum Punkt $(2a,2a,0)$ zu befördern. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. Muss man die Arbeit aufbringen oder wird sie frei? (2 Punkte)

d.) Erklären Sie in Worten, was ein konservatives Kraftfeld ist. Geben Sie dazu zwei charakteristische Phänomene für die Bewegung eines Körpers in einem konservativen Kraftfeldes an (in Bezug auf Arbeit und Energie). (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 3: Analytische Mechanik (6 Punkte)



Zwei Massen m_1 und m_2 sind wie gezeigt mit einem masselosen Seil der Länge ℓ verbunden und rutschen bzw. fallen reibungsfrei unter dem Einfluss der Schwerkraft. (Masse 2 hat die Tischplatte noch nicht verlassen und Masse 1 hat den Boden noch nicht berührt.)

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie?
Geben Sie dabei **deutlich** an, welche Koordinate Sie meinen, also z.B. "x-Koord. von Teilchen 1" oder "x-Koord. von Teilchen 2", etc. Benutzen Sie die Achsen möglichst, wie in der Skizze vorgegeben. **Falls Sie eigene Achsen oder Bezeichnungen wählen,** erläutern Sie diese anhand einer eindeutigen eigenen Skizze. (1 Punkt)

b.) Stellen Sie für dieses Problem sowohl die Lagrange- als auch die Hamiltonfunktion auf (in den jeweils angemessenen Koordinaten). (2 Punkte)

c.) Untersuchen Sie, ob eine Koordinate zyklisch ist (mit Begründung!). (1 Punkt)

d.) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen nach dem Hamiltonformalismus auf. (Die Hamilton-Bewegungsgleichungen sind in der Formelsammlung angegeben.) (1 Punkt)
Für Lösungen nach dem Lagrangeformalismus gibt es hier keine Punkte!

e.) Führen Sie die Hamilton-Bewegungsgleichungen über in eine einzige Differenzialgleichung 2. Ordnung. (1 Punkt)

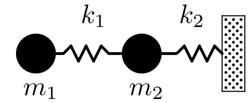
Sollten Sie b.) d.) nicht geschafft haben, lösen Sie e.) bitte mit folgenden Ersatz-Differenzialgleichungen. (Diese haben mit der gestellten Aufgabe nichts zu tun):

$$\dot{q} = mq^2 + p, \qquad \dot{p} = 2mq$$

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 4: Gekoppelte Schwingungen (8 Punkte)



k und m sind positive Konstanten.

Verwenden Sie die Bezeichnungen aus dem Aufgabentext! Die Bezeichnungen und Nummerierungen dürfen nicht geändert werden.

Gegeben sind 2 identische schwingende Massen, $m_1 = m_2 = m$, die mit den Federn $k_1 = 2k$ und $k_2 = 3k$ untereinander und an der rechten Wand befestigt sind, im Schema (siehe Abb.).

Die linke Masse ist nicht mit der Wand verbunden, sondern kann frei schwingen (keine Schwerkraft im Spiel!).

a.) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der beiden Massen auf, wahlweise nach Newton oder Lagrange. Wenn Sie sich für Newton entscheiden, müssen Sie die Vorzeichen anhand einer Skizze verdeutlichen.
(2 Punkte)

b.) Berechnen Sie alle Eigenfrequenzen. (3 Punkte)

c.) Berechnen Sie für eine Eigenfrequenz Ihrer Wahl das Verhältnis der Amplituden. Skizzieren Sie dies in (wahlweise) einem der Schemata aus der Vorlesung (also z.B. durch Pfeile an den Massen). (2 Punkte)

d.) Was ist eine Eigenfrequenz? Eine richtge Antwort reicht. (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \qquad\qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta),\ \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),\ \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad\qquad dV = r^2\,\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\rm rot} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung:$\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi+\chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\chi-\chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

Arbeit: $W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\,dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\,dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\,dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hamilton-Bewegungsgleichungen: $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dfrac{\partial H}{\partial t} = -\dfrac{\partial L}{\partial t}.$