

KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2020/21, Montag, 1.3.21, 12:00 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!

Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.

Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)

Zeit: 90 Min

Punkte: 7 / 8 / 8 / 6

Summe: 29 (bestanden ab 14,5 Punkten)

Aufgabe 1: Kraft und Arbeit (7 Punkte)

Alle Einheiten wurden hier der Einfachheit halber auf 1 gesetzt.

Gegeben sind die beiden Kraftfelder:

$$\vec{F}_1 = (y^2, x^2, \cos \frac{\pi x}{2}), \quad \vec{F}_2 = (\dot{x}, \dot{y}, 0).$$

a.) Untersuchen Sie für beide Felder, ob sie konservativ sind. (Begründung und richtige Antwort sind beide punktrelevant). (2 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir nur noch das Kraftfeld \vec{F}_1 :

b.) Welche Arbeit ist nötig, um eine Masse gegen das Kraftfeld \vec{F}_1 auf direktem Weg vom Punkt $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$ zum Punkt $\vec{r}_2 = (1, 2, 0)$ und von dort zu $\vec{r}_3 = (2, 2, 2)$ zu befördern? Muss die Arbeit aufgebracht werden oder wird sie frei? (4 Punkte)

c.) Würden Sie erwarten, dass die Arbeit sich (grundsätzlich) ändert, wenn die Masse auf einem direkten Weg von \vec{r}_1 nach \vec{r}_3 befördert wird (anstatt über \vec{r}_2)? (Mit kurzer Begründung) (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 2: Bewegungsgleichung (DGL) (8 Punkte)

Gegeben ist ein harmonischer Oszillator mit viskoser Stokes'scher Reibung (Masse m , Federkonstante k , Reibungskonstante μ_S), der ohne Schwerkraft entlang der x -Achse schwingt.

a.) Stellen Sie (mit diesen Informationen) die Bewegungsgleichung für den Oszillator auf. (2 Punkte)

b.) Ersetzen Sie nun die Konstanten durch folgende Zahlen: $m = 1$, $k = 3$, $\mu_S = 4$. Lösen Sie die entstehende DGL unter den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2$.

Ersatz: Sollten Sie a.) nicht geschafft haben, lösen Sie die folgende DGL (gleiche Anfangsbedingungen):

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) - 4x(t) = 0.$$

(4 Punkte)

c.) Würden Sie die Bewegung, die Sie erhalten haben eher als Schwingung mit schwacher oder mit starker Dämpfung bezeichnen (mit Begründung)? Erstellen Sie eine grobe Skizze von $x(t)$. (Nur die ungefähre Form ist gefragt, keine genauen Anfangswerte oder Achsenskalierung). (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Lagrange (8 Punkte)

Gegeben sei eine Punktmasse m , die auf einer Schiene der Form

$$z(x) = x^2 + x^3$$

unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei rutscht.

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie?

Skizzieren Sie die Schiene, das Teilchen und alle auf das Teilchen wirkenden Kräfte. (Bei der Skizze sollten die Nullstellen, die ungefähre Form und das asymptotische Verhalten der Schiene stimmen. Eine weitergehende Kurvendiskussion ist nicht verlangt.)

(2 Punkte)

b.) Stellen Sie für dieses Problem die Lagrangefunktion auf. (2 Punkte)

c.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) nach Lagrange auf. (2 Punkte)

Sollten Sie b.) nicht geschafft haben, lösen Sie c.) bitte mit folgender Ersatzfunktion. (Diese hat mit der gestellten Aufgabe nichts zu tun):

$$L(\alpha, \dot{\alpha}, t) = 2\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + \dot{\alpha} \sin^2 \alpha.$$

Um die Korrektur zu vereinfachen, lösen Sie bitte alle Klammern auf, bzw. klammern Sie nichts aus und fassen die Terme soweit wie möglich zusammen.

d.) Erklären Sie in 1-2 Sätzen möglichst prägnant, warum dieses Problem alleine durch Newton deutlich umständlicher/schwieriger zu lösen ist. (Dies beantworten Sie bitte ohne die Ersatzfunktion). (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Masse und Schwerpunkt (6 Punkte)

ρ_0 und a sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist ein Zylinders mit Radius R und Höhe H , der symmetrisch zur xy -Ebene liegt mit der z -Achse als Symmetrieachse (siehe Skizze).

Die Massendichte betrage:

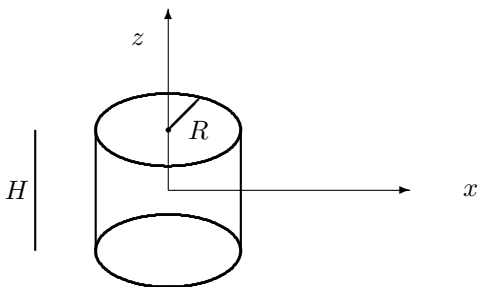
$$\rho(r_{\perp}, \varphi, z) = \frac{\rho_0}{a^3} \exp(2z) \exp(-r_{\perp}^2).$$

a.) Berechnen Sie die Masse M des Zylinders. (2 Punkte)

b.) Zeigen Sie entweder durch Rechnung oder durch genaue Begründung: Der Schwerpunkt des Zylinders liegt auf der z -Achse. (2 Punkte)

c.) Warum gilt für diesen Zylinder nicht: "Masse = Dichte mal Volumen"? Was müsste sich ändern, damit dies gilt? (1 Punkt)

d.) Liegt der Schwerpunkt des Zylinders im Koordinatenursprung (mit Begründung)? (1 Punkt)



FORMELSAMMLUNG

Zylinderkoordinaten: $x = r_{\perp} \cos \varphi, \quad y = r_{\perp} \sin \varphi \quad z = z$

$$\vec{e}_{r_{\perp}} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \vec{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \vec{e}_z \quad (\text{müssen Sie kennen}).$$

$$v^2 = \dot{r}_{\perp}^2 + r_{\perp}^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \quad dV = r_{\perp} dr_{\perp} d\varphi dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad z = r \cos \vartheta$

$$\vec{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \quad \vec{e}_{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad \vec{e}_{\vartheta} = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta).$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta, \quad dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H |\vec{F}_{\perp}| \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|}, \quad \text{Gleitreibung: } \vec{F}_G = -\mu_G |\vec{F}_{\perp}| \frac{\vec{v}}{v},$

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S \vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v \vec{v}.$

Die weiteren Standardkräfte und ihre Potentiale müssen Sie kennen.

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i \sin[\lambda t]$

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T, \quad \text{Oszillator: } \omega_0^2 = k/m, \quad \text{Pendel: } \omega_0^2 = g/l$$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi| \exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \text{Re } \chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi^*), \quad \text{Im } \chi = \frac{1}{2}(\chi - \chi^*), \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im } \chi}{\text{Re } \chi}$$

$$\text{Arbeit: } W_{21} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{Potenzial (potenzielle Energie): } V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$V = - \int^x F_x dx + f(y, z), \quad V = - \int^y F_y dy + f(x, z), \quad V = - \int^z F_z dz + f(x, y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s} \times \vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt} \vec{L}$$