KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2018/19, Donnerstag, 7.2.19, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 7 / 6 / 7 / 7 Summe: 27 (bestanden ab 13,5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (7 Punkte)

H, R, und ρ_0 sind Kontanten mit positiven Werten.

1. Berechnen Sie: (0.5 Punkte)

$$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$$

2. Ein Stein fällt aus 5 m Höhe auf die Erdoberfläche. Berechnen sie seine Auftreffgeschwindigkeit (es reicht der Betrag v) mit Hilfe der Energieerhaltung. Nehmen Sie für die Erdbeschleunigung an: $g = 10m/s^2$.
(1 Punkt)

3. Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2 - x^2$ in ein xy-Koordinatensystem. Schraffieren Sie die Fläche, die die beiden Funktionen zwischen sich einschließen.
Berechnen Sie diese Fläche. (1.5 Punkte)

4. Berechnen Sie die beiden Unbekannten x und y: (1 Punkt)

$$\begin{aligned} x + 5y &= 3 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

5. Eine Halbkugel vom Radius R besitze die konstante Massendichte ρ_0. Wie lautet ihre Masse?
(0.5 Punkte)

6. Eine Halbkugel vom Radius R besitze die Massendichte $\rho(r, \vartheta, \varphi) = \rho_0\, r^2/R^2$. Wie lautet ihre Masse?
(1.5 Punkte)

7. Sind die folgenden vier Größen **Vektoren** aus R^3? ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Vektoren.) Bitte beantworten Sie auch dies auf dem zusätzlich verteilten Papier! (mit: ja / nein) (1 Punkt)

a.) Impuls, b.) Drehimpuls, c.) $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})$, d.) $\vec{a}^{\,2}$
Nicht raten! Falsche Antworten ergeben Minuspunkte (innerhalb dieser Teilaufgabe)

Aufgabe 2: Kraft und Arbeit (6 Punkte)

Alle Einheiten wurden hier der Einfachheit halber auf 1 gesetzt. Das Problem ist damit absichtlich dimensionslos formuliert.

Gegeben ist das Kraftfeld: ($x > 0$, $z > 0$)

$$\vec{F} = (\frac{y}{x^2}, \frac{y}{z}, xz).$$

a.) Berechnen Sie die Arbeit, um in diesem Kraftfeld einen Körper auf direktem Weg vom Punkt $P_1 = (1, 1, 1)$ zum Punkt $P_2 = (2, 1, 2)$ zu befördern. (2 Punkte)

b.) Berechnen Sie die Arbeit, um den Körper aus a.) ebenfalls vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 zu befördern, diesmal aber zuerst eine (passende) Strecke in $x-$ und danach eine (passende) Strecke in $z-$Richtung.
(2 Punkte)

c.) Ist das gegebene Kraftfeld konservativ (mit Begründung)? (1 Punkt)

d.) Wodurch entsteht eine Scheinkraft (Trägheitskraft)? Nennen Sie ein Beispiel (der Begriff reicht).
(1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Bewegungsgleichung (7 Punkte)

m, k und μ_s sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist eine Masse m, die sich entlang der x-Achse unter dem Einfluss einer Kraft $\vec{F}_1 = +kx\,\vec{e}_x$ bewegt. Außerdem sei viskose Stokes'sche Reibung $\vec{F}_2$ vorhanden mit dem Reibungskoeffizienten $\mu_s = 2\beta m$.

a.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ auf. (1 Punkt)

b.) Handelt es sich bei diesem Problem um den harmonischen Oszillator mit Reibung (mit kurzer Begründung)? (1 Punkt)

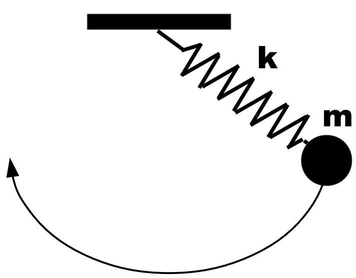
c.) Ist die Bewegungsgleichung aus a.) homogen? Ist die linear? Ist sie gewöhnlich? Welcher Ordnung ist sie? (Ohne Begründung, aber mit Punktabzug bei falschen Teilantworten) (1 Punkt)

d.) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (ohne Anfangsbedingungen). (2 Punkte)

e.) Zusätzlich soll nun auch noch die konstante Kraft $\vec{F}_3 = F_0\,\vec{e}_x$ wirken. Wie lautet nun die Bewegungsgleichung für $x(t)$? Wie lautet jetzt ihre Lösung (wieder ohne Anfangsbedingungen)? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Lagrange-Formalismus: Pendelnder Oszillator (7 Punkte)



m, k und ℓ_0 sind Konstanten mit positiven Werten.

An der Decke hängt ein (masseloser) harmonischer Oszillator der Federkonstante k und daran eine Punktmasse m. Der Oszillator schwingt in der xz-Ebene wie ein Pendel (siehe Skizze). Seine Grundlänge bei entspannter Feder sei ℓ_0.

Der Oszillator kann sich nicht verbiegen, sondern sich nur in Längsrichtung verformen, d.h. länger oder kürzer werden. (Dies lässt sich z.B. realisieren, in dem man ihn über einen Stab wickelt.)
Schwerkraft sei vorhanden.

a.) Skizzieren Sie dieses Problem auf Ihr Blatt. Skizzieren Sie eigenständig ein Koordinatensystem und markieren Sie dort alle Koordinaten und Größen, die Sie benutzen wollen. Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Welche Koordinate(n) wählen Sie? (1 Punkt)

b.) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Masse m in der/den in (a) gewählte(n) Koordinate(n). (1 Punkt)

c.) Stellen Sie die Lagrange-Funktion in dieser/n Koordinate(n) auf. (2 Punkte)

d.) Finden Sie die Bewegungsgleichung(en) aus der Lagrangefunktion. (2 Punkte)

Sollten Sie c.) nicht geschafft haben, so verwenden Sie hier folgende "Ersatz-Lagrangefunktion" (die natürlich nichts mit dem ursprünglichen Problem zu tun hat).

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\,\frac{\dot{x}^2}{y} + x^2\dot{y}$$

e.) Warum wird beim Aufstellen der Bewegungsgleichungen nach Lagrange i. A. die Rechnung fehlerhaft, wenn man zu viele Koordinaten wählt? Wie viele Koordinaten muss man wählen? (Keine Formeln verlangt, sondern eine kurze Begründung in 1-2 Sätzen). (1 Punkt)

1 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne die Ersatzfunktion (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG (darf abgerissen werden)

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi, \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2, \qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2\,\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m,$ Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \operatorname{Re}\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \operatorname{Im}\chi = \frac{1}{2}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\chi}{\operatorname{Re}\chi}$$

Arbeit:

$W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r},$ Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \Omega_\alpha\Omega_\beta\hat{J}_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$