# KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

**Wintersemester 2017/18, Donnerstag, 8.2.18, 10:15 Uhr**

**Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!**
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
**Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)**
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 4 / 5 / 5 / 7 / 6 Summe: 27 (bestanden ab 13.5 Punkten)

---

**Aufgabe 1: Grundwissen (4 Punkte)**

1. Berechnen Sie alle Lösungen für $x$: (0.5 Punkte)

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$$

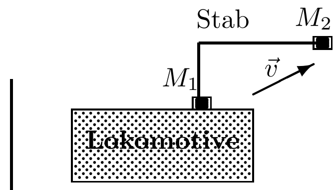


Abb. 1

2. In einem bekannten Kinderfilm bringt man eine Lokomotive mit Hilfe von zwei Magneten $M_1$ und $M_2$ zum Fliegen. $M_1$ wird am Dach der Lokomotive befestigt, $M_2$ am oberen Ende eines festen (gewinkelten) Stabs, der mit $M_1$ und der Lokomotive starr verbunden ist (siehe Abb. 1.) Da beide Magneten sich anziehen, soll der obere Magnet den unteren (und damit die gesamte Lokomotive) in die Luft und dann immer höher ziehen.

Erklären Sie in 1-2 Sätzen, warum dies in der Realität nicht funktionieren kann und welchem Axiom (das wir dieses Semester kennengelernt haben) es widerspricht. (1 Punkt)

3. Berechnen Sie das bestimmte Integral: (0.5 Punkte)

$$\int_0^1 x \, \exp(x^2) \, dx.$$

4. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{A} = (2x, 1, 0)$ in ein passendes Koordinatensystem.

5. Sind die folgenden vier Größen **Vektoren** aus $R^3$? ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind Vektoren.) Bitte beantworten Sie auch dies auf dem zusätzlich verteilten Papier! (mit: ja / nein) (1 Punkt)

a.) Kraft,

b.) Arbeit,

c.) $\vec{a} \times \vec{b}$,

d.) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{b}$

**Aufgabe 2: Kraft, Arbeit und Potenzial (5 Punkte)**

$F_0$ hat die Einheit Newton. $a$ hat die Einheit Zentimeter. Die kartesischen Koordinaten $x, y, z$ werden ebenfalls in $cm$ gemessen.

Gegeben ist das (konservative) Kraftfeld: $\vec{F} = \frac{F_0}{a}\,(y + z,\, x,\, x)$.

a.) Zeigen Sie, dass das Kraftfeld konservativ ist. Welche Bewegungsgröße eines Körpers, der sich in diesem Kraftfeld bewegt, ist erhalten? (1 Punkt)

b.) Berechnen Sie das Potenzial (potenzielle Energie) $V$ dieses Kraftfeldes unter der Zusatzbedingung $V(0,0,0) = V_0$. Welche Einheit besitzt dieses Potenzial? (2 Punkte)

c.) Finden Sie einen nicht-geschlossenen Weg, auf dem Sie einen Körper gegen dieses Kraftfeld bewegen können, ohne Arbeit zu verrichten (mit kurzer Begründung!). (1 Punkt)

d.) Welche Arbeit müssen Sie verrichten, um einen Körper gegen dieses Kraftfeld vom Punkt $(a, 0, 0)$ zum Punkt $(a, a, a)$ zu befördern? (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

**Aufgabe 3: Beschreibung von Bewegungen (5 Punkte)**

$R$ und $H$ sind konst. Längen, $t_0$ eine konstante Zeiteinheit, $t$ die Zeit.

Gegeben ist eine Trajektorie eines Körpers der Masse $m$, die durch folgenden Ortsvektor beschrieben wird.

$$\vec{r} = \Big( R\,\cos(5\pi t/t_0),\; R\,\sin(5\pi t/t_0),\; H(1-t/t_0) \Big).$$

a.) Die Bewegung startet zur Zeit $t = 0$. Welche Form besitzt die Trajektorie des Körpers? (Skizze oder Erklärung). In welcher Richtung wird sie durchlaufen (Pfeil an Skizze reicht)? (1 Punkt)

b.) Wann erreicht der Körper die $xy$-Ebene? An welchem Punkt $(x, y, z)$ ist dies der Fall? (2 Punkte)

c.) Berechnen Sie die (resultierende) Kraft, die auf den Körper wirken muss, damit er diese Trajektorie vollführt. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**Aufgabe 4: Lagrange-Formalismus (7 Punkte)**

Ein punktförmiges Teilchen rutscht reibungsfrei in einer halbzylinderförmigen unendlich langen Rinne mit Radius $R$ unter dem Einfluss der Gewichtskraft $\vec{G} = -mg\vec{e}_x$ (in den Koordinaten nach Skizze).

Beachten Sie: Auch wenn hier nicht gefragt, kann es z.B. eine Anfangsgeschwindigkeit in $z$-Richtung erhalten! Die Anfangsgeschwindigkeit sei jedoch so gedacht, dass es die Rinne nicht verlässt.

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Stellen Sie die Lagrange-Funktion in angemessenen Koordinaten auf. (2,5 Punkte)

Sollten Sie a.) nicht geschafft haben, können Sie die folgenden Teilaufgaben auch mit folgender "Ersatz-Lagrangefunktion" bearbeiten (die natürlich nichts mit dem ursprünglichen Problem zu tun hat).

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \exp(x)\dot{y}^2\right) + x^2$$

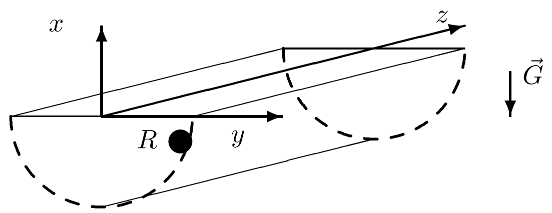
b.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) auf. (2 Punkte)

c.) Finden Sie (außer der Energie) noch eine Erhaltungsgröße des Problems (mit Begründung) und berechnen Sie diese. (1 Punkt)

d.) Welche der folgenden Begriffe treffen jeweils auf die Bewegungsgleichung(en) zu? (1,5 Punkte)

(1) Homogen/ (2) Linear/ (3) Gewöhnlich

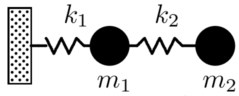
Wenn Sie die Achsen anders wählen oder neue Bezeichnungen einführen, so erläutern Sie diese bitte deutlich, am besten anhand einer Skizze!




1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne die Ersatzfunktion (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**Aufgabe 5: Gekoppelte Schwingungen (6 Punkte)**

Gegeben sind die beiden Massen $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, die mit den beiden Federn $k_1 = 4k$, $k_2 = 2k$ untereinander und mit der Wand verbunden sind (siehe Skizze). $m$ und $k$ sind Einheitsmasse, bzw. -feder.




a.) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen dieses Systems auf. (2 Punkte)

b.) Finden Sie die Eigenfrequenzen dieses Systems. (2 Punkte)

c.) Definieren Sie den Begriff "Eigenfrequenz" physikalisch. Woran kann man sehen, dass ein System in einer Eigenfrequenz schwingt? (2 Eigenschaften) (1 Punkt)

d.) Wie viele Eigenfrequenzen besitzt eine Gitarrensaite, die auf das eingestrichene a ($\nu = 440\,Hz$) gestimmt ist? (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

**FORMELSAMMLUNG (darf abgerissen werden)**

**Zylinderkoordinaten:** $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi, \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2, \qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

**Kugelkoordinaten:** $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2\, \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\mathrm{rot}} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega} \times \vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m$, Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

**Komplexe Zahlen:**

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi*), \quad \mathrm{Im}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi - \chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\chi}{\mathrm{Re}\,\chi}$$

**Arbeit:**

$$W_{21} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad \text{Potenzial (potenzielle Energie):} \quad V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$V = -\int^x F_x\, dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\, dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\, dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

**Analytische Mechanik:**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

**Wellengleichung:**

$$\frac{d^2 z(x,t)}{dt^2} = c^2\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}, \quad c^2 = T/\rho_\ell, \quad \omega = kc.$$

**Hilfen zum Trägheitstensor:**

$$J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\Omega_\alpha\Omega_\beta\hat{J}_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{J}\vec{\Omega}.$$