KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK I (LAK)

Wintersemester 2016/17, Donnerstag, 9.2.17, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf das zusätzlich verteilte Papier!
Benutzen Sie wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 3 / 6 / 7 / 6 / 6 Summe: 28 (bestanden ab 14 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (3 Punkte)

1. Berechnen Sie: (0.5 Punkte)

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2+1}$$

2. Gegeben ist die die Geradengleichung:

$$f(x) = 4\,x + 1.$$

Wie lautet die Gleichung einer dazu senkrechten Gerade, die durch den Punkt $(0, 0)$ geht? (0.5 Punkte)

3. Gegeben sind folgende Vektoren und Skalare: $\vec{A} = (0, -1, 1)$, $\vec{B} = (2, 1, 3)$ und $a = 2$. Berechnen Sie folgende Ausdrücke **soweit möglich!**

$$(i)\, \vec{A} + \vec{B}, \qquad (ii)\, \vec{A} \cdot \vec{B}, \qquad (iii)\, a\vec{A} + \vec{B}, \qquad (iv)\, a + \vec{A}$$

Machen Sie deutlich, wenn eine vorgeschlagene Rechenoperation nicht definiert ist! (1 Punkt)

4. Sind die folgenden vier Größen **Vektoren** aus R^3? Bitte beantworten Sie auch dies auf dem zusätzlich verteilten Papier! (mit: ja / nein)
(1 Punkt)

a.) **Geschwindigkeit,**

b.) **Geschwindigkeitsbetrag,**

c.) **Geschwindigkeitskomponente,**

d.) **1. Ableitung der Geschwindigkeit.**

Aufgabe 2: Kraft und Arbeit (6 Punkte)

Alle Einheiten wurden hier der Einfachheit halber auf 1 gesetzt.

Gegeben ist das Kraftfeld:

$$\vec{F} = (xy,\, x\,\sin(\pi z),\, x^2).$$

a.) Welche Arbeit ist nötig, um eine Masse gegen das Kraftfeld auf direktem Weg vom Punkt $(1, 2, 0)$ zum Punkt $(1, 4, 1)$ zu befördern? Muss die Arbeit aufgebracht werden oder wird sie frei? (3 Punkte)

b.) Ist bei einer Verschiebung eines Körpers gegen dieses Kraftfeld **entlang der z-Achse** die Arbeit gleich oder ungleich Null? Begründen Sie Ihre Antwort anschaulich (ohne Rechnung)! (1 Punkt)

c.) Ist bei einer Verschiebung eines Körpers gegen dieses Kraftfeld **entlang der x-Achse** die Arbeit gleich oder ungleich Null? Begründen Sie Ihre Antwort anschaulich (ohne Rechnung)!
(1 Punkt – nur mit richtiger Begründung!)

d.) Finden Sie eine **konservative Kraft**, bei der **alle Komponenten sowohl von x, als auch von y und z** abhängen. Begründen Sie, woher Sie wissen, dass dieses Kraftfeld konservativ ist.
(1 Punkt – nur mit richtiger Begründung!)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Newton und Zwangsbedingungen (7 Punkte)

a.) Beschreiben Sie das Newton'sche Axiom "Actio = Reactio" in einem Satz. Erläutern Sie seine Bedeutung anhand einer Skizze an einem selbstgewählten Beispiel. (Das Beispiel darf sehr einfach sein.) Die Skizze muss die eingeführten Größen (insbesondere die eingeführten Kräfte) erkennbar darstellen. (2 Punkte)

b.) Gegeben ist ein Punktteilchen der Masse m, das unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einer Schiene rutscht ohne diese verlassen zu können). Die Schiene hat die Form:

$$z(x) = \exp(x^2).$$

Skizzieren Sie (ungefähr) die Schiene, das Teilchen und darauf wirkenden Kräfte in ein (hinreichend großes) Koordinatensystem. Die Skizze kann "Frei Hand" erstellt werden, jedoch müssen Minima/Maxima und asymptotisches Verhalten der Schiene erkennbar sein. (1 Punkt)

c.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt das Problem aus b.)?

Stellen Sie die Newton'schen Bewegungsgleichungen komponentenweise für dieses Problem auf und führen Sie diese über in so viele Gleichungen, wie es der Zahl der Freiheitsgrade entspricht. Sie müssen diese Bewegungsgleichung jedoch nicht mehr besonders vereinfachen oder umformen! (3 Punkte)

d.) Warum machen Zwangsbedingungen, die ein Teilchen auf einer gekrümmten Kurve halten (so wie hier) das Aufstellen der Bewegungsgleichung komplizierter als z.B. im Fall der schiefen Ebene? 1-2 Sätze reichen als Antwort! (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Lagrange-Formalismus (6 Punkte)

m, α sind positive Konstanten $r_\perp, \varphi, z$ sind die Zylinderkoordinaten.

Ein punktförmiger Körper der Masse m bewegt sich unter dem Einfluss des Potenzials $V(r_\perp, \varphi, z) = -\alpha/r_\perp$ frei im Raum. (Anschaulich: Die z-Achse übt auf den Körper eine gleichmäßige anziehende Kraft aus).

a.) Wie viele Freiheitsgrade besitzt dieses Problem? Stellen Sie die Lagrange-Funktion in angemessenen Koordinaten auf. (1 Punkt)

b.) Leiten Sie die Bewegungsgleichung(en) der Punktmasse her. (3 Punkte)

Sollten Sie a.) nicht geschafft haben, so arbeiten Sie ersatzweise mit folgender Lagrangefunktion (die nichts mit dem eigentlichen Problem zu tun hat):

$$L(x, y, z) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + (\dot{y} + \dot{z})^2\right) - y\sqrt{x}.$$

c.) Gibt es zyklische Koordinaten?

Falls ja, berechnen Sie die daraus folgenden Erhaltungsgrößen. Welche Symmetrie ist jeweils damit verknüpft? (Auch diese Frage dürfen Sie ggf. mit dem "Ersatz" aus b.) lösen.) (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den "Ersatz" (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 5: Volumenintegrale (6 Punkte)

a.) Was bedeutet der Ausdruck

$$A = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \rho_i \, \Delta V_i$$

anschaulich? (ρ ist die Dichte.)

Erklären Sie Formel anhand einer Skizze. Machen Sie in der Skizze deutlich, was mit ΔV_i und ρ_i jeweils gemeint ist. Was bedeutet $\lim_{\Delta V_i \to 0}$? Welche Größe A wird hier berechnet? Warum reicht keine einfache Multiplikaton der Größen ρ und V? (3 Punkte)

b.) Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\iiint \rho \, dV$$

mit $\rho = \rho_0 \, z^2$ über einen Zylinder (symmetrisch zur z-Achse) der Höhe H, Radius R, Dichte ρ und der Bodenfläche in der xy-Ebene. ρ_0 ist eine Konstante. (3 Punkte).

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

FORMELSAMMLUNG (darf abgerissen werden)

Zylinderkoordinaten: $x = r_\perp \cos\varphi, \quad y = r_\perp \sin\varphi, \quad z = z$

$\vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \qquad \vec{e}_z$ (müssen Sie kennen).

$$v^2 = \dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2, \qquad dV = r_\perp\, dr_\perp\, d\varphi\, dz$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta, \qquad dV = r^2\ \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Kreisbewegung: $\vec{v}_{\text{rot}} = \vec{\omega}\times\vec{r}, \quad \dot{\vec{e}}_{i'} = \vec{\omega}\times\vec{e}_{i'}.$

Reibungskräfte: Haftreibung $\vec{F}_{H,max} = -\mu_H|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{F}}{|\vec{F}|}$, Gleitreibung: $\vec{F}_G = -\mu_G|\vec{F}_\perp|\dfrac{\vec{v}}{v}$,

Viskose Reibung: Stokes'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_S\vec{v}$

Newton'sche Reibung: $\vec{F}_R = -\mu_N v\vec{v}.$

Eulersche Formeln: $\exp[\pm i\lambda t] = \cos[\lambda t] \pm i\sin[\lambda t]$

$\omega = 2\pi\nu, \quad \nu = 1/T,$ Oszillator: $\omega_0^2 = k/m$, Pendel: $\omega_0^2 = g/\ell$

Komplexe Zahlen:

$$\chi = |\chi|\exp[i\varphi], \quad |\chi| = \sqrt{\chi\chi^*}, \quad \operatorname{Re}\chi = \frac{1}{2}(\chi+\chi*), \quad \operatorname{Im}\chi = \frac{1}{2}(\chi-\chi*), \quad \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im}\chi}{\operatorname{Re}\chi}$$

Arbeit:

$W_{21} = -\displaystyle\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, Potenzial (potenzielle Energie): $V(\vec{r}) = -\displaystyle\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$V = -\int^x F_x\,dx + f(y,z), \quad V = -\int^y F_y\,dy + f(x,z), \quad V = -\int^z F_z\,dz + f(x,y).$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}, \quad \vec{N} = \vec{s}\times\vec{F}, \quad \vec{L} \equiv m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{r}\times\vec{p}, \quad \vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L}$$

Analytische Mechanik:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Wellengleichung:

$$\frac{d^2z(x,t)}{dt^2} = c^2\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}, \quad c^2 = T/\rho_\ell, \quad \omega = kc.$$

Hilfen zum Trägheitstensor:

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2), \quad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\Omega_\alpha\Omega_\beta\hat{I}_{\alpha,\beta}, \qquad \vec{L} = \hat{I}\vec{\Omega}.$$