NACHKLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2024, Mittwoch, 9.10.24, 10:00 Uhr

Auf S. 3/4 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 6 / 6 / 7 / 6 Summe: 25 (bestanden ab 12.5 Punkten)

Beantworten Sie alles auf dem zusätzlich verteilten Papier (Vorder- oder Rückseiten oder beides)! Unterstreichungen und Antworten auf dieser Vorlage werden nicht gewertet!

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte)

a.) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichung: (1 Punkt)

$$2x^2 + 2x - 2 = 2$$

b.) Skizzieren Sie Funktionen $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{-x}$ in zwei getrennte Koordinatensysteme. (Es muss erkennbar sein, welche Funktion jeweils gemeint ist.) (1 Punkt)

c.) Wie lautet die Funktionsvorschrift einer nach unten geöffneten Normalparabel mit dem Scheitel im Punkt $(1, 2)$? (1 Punkt)

d.) Ein Raumschiff fliegt mit der Geschwindigkeit $v = \frac{\sqrt{11}}{6}c$. Wie lautet $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ als natürlicher Bruch? (1 Punkt)

q und a sind Konstanten mit positivem Wert.

e.) Zwei Punktladungen $Q_1 = Q_2 = q$ befinden sich an den Orten $\vec{r}_1 = (0, a, 0)$ bzw. $\vec{r}_2 = (0, 0, a)$. Wie lautet das von beiden Ladungen gemeinsam erzeugte elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$? Welche Kraft üben Q_1 und Q_2 auf eine dritte Ladung q am Koordinatenursprung aus? (2 Punkte)

Aufgabe 2: Energie im elektrischen Feld (6 Punkte)

ρ_F, Φ_0, d, q, m, τ sind Konstanten mit positivem Wert. d bezeichnet eine Länge, τ eine Zeit.

Gegeben ist ein ebener Plattenkondensator mit den beiden (in yz-Richtung) unendlich ausgedehnten Platten an den Orten $x = 0$ und $x = d$. Die Platte bei $x = 0$ trage die positive Ladungsdichte ρ_F und die Platte bei $x = d$ die negative Ladungsdichte $-\rho_F$

Das Feld zwischen den Platten lautet: $\vec{E} = (\rho_F/\epsilon_0)\,\vec{e}_x$.

a.) Zeigen Sie, dass für das elektrostatische Potenzial zwischen den Platten gilt:

$$\Phi(x) = -\Phi_0\, x$$

und bestimmen Sie Φ_0. (1 Punkt)

b.) Ein Teilchen der Masse m besitzt die negative Ladung $q = -m\epsilon_0 d/(\rho_F \tau^2)$. Zeigen Sie, dass die Einheit der einer Ladung entspricht.

Hinweis: $\epsilon_0 = 8.854310^{-12} C^2/(Nm^2)$

(1 Punkt)

c.) Das Teilchen aus b.) wird vom Ort $x_0 = d/4$ aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = d/\tau$ in Richtung der negativen Platte geschossen. Welche Energie besitzt dieses Teilchen? (2 Punkte)

d.) Erreicht das Teilchen aus b.) die negative Platte? Falls ja: mit welcher Geschwindigkeit? Falls nein: Bei welcher Position in x kehrt es um? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Magnetismus (7 Punkte)

Gegeben ist ein unendlich langer, gerader unendlich dünner Leiter, der vom Strom I durchflossen wird. Leiter (und somit Strom) verlaufen in die positive z-Richtung.

a.) Welches Feld verläuft um diesen Leiter? Ist es ein $\vec{E}$- oder ein $\vec{B}$-Feld? Welche geometrische Form besitzt es? Wie drückt man dies mathematisch aus? Skizzieren Sie den Leiter und das Feld. (1 Punkt)

b.) In der Vorlesung wurde das Feld dieses Leiters mit zwei verschiedenen physikalischen Gesetzen berechnet. Wie lauten die Namen dieser Gesetze? (1 Punkt)

c.) Berechnen Sie das Feld dieses Leiters (in Betrag und Richtung) auf eine der beiden Arten aus b.). (3 Punkte)

d.) Wie lautet die Lorentzkraft? In welchen Situationen wirkt sie? Worauf und in welche Richtung? Ist sie konservativ (mit Begründung)? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen und Elektromagnetische Wellen (6 Punkte)

k, E_0 und ω sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) mit dem $\vec{E}$-Feld:

$$\vec{E} = E_0 \exp\left(i\left(kx - \omega t\right)\right) \vec{e}_z$$

mit den üblichen Konstanten k und ω.

a.) In welche Richtung breitet sich diese Welle aus? Entlang welcher Richtung schwingt der Vektor des $\vec{E}$-Feldes? In welche Richtung schwingt der Vektor des $\vec{B}$-Feldes? (1 Punkt)

b.) Wie lautet die Maxwell-Gleichung, welche die Quellen des $\vec{E}$-Feldes beschreibt, in differenzieller und in integraler Form? (1 Punkt)

c.) Zeigen Sie für die differenzielle Form, dass die Maxwell-Gleichung aus b.) durch das hier gegebene $\vec{E}$-Feld (im Vakuum) erfüllt ist. (1 Punkt)

d.) Zeigen Sie für die integrale Form, dass die Maxwell-Gleichung aus b.) durch das hier gegebene $\vec{E}$-Feld (im Vakuum) erfüllt ist. Erstellen Sie dazu eine Skizze, die das Integrationsgebiet, das $\vec{E}$-Feld und die verwendeten Koordinaten deutlich zeigt. Verwenden Sie **keine** Integralsätze, um die Rechnung zu vereinfachen. (Die volle Punktzahl gibt es nur auf die explizite Berechnung der entsprechenden Integrale.) (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \, \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla} V(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial (r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \left(\frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp} \left(\frac{\partial (r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial \varphi} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp} \right) + \frac{1}{r_\perp^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta \sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla} V(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial (\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r C_\varphi)}{\partial r} \right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r C_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\, d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\, d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\, dr\, d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2 \, \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

Zylindermantel: $df = R \; d\varphi\, dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = \oint\!\!\!\oint \vec{A} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\!\!\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \, \frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\!\!\int \vec{j} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\, \vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 r \, |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \;&=\; \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\
&+ \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \ldots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z\right] + \\
&\quad + \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) + \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \ldots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie: LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 NI}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$