AUFGABEN DER NACHKLAUSUR ZUR THEO. PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2018, Dienstag, 15.10.18, 14:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 5 / 5 / 7 / 7 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

Warnung: Beantworten Sie auch dies alles auf den zusätzlichen Schreibvorlagen!

a.) Berechnen Sie: (0.5 Punkte)

$$25.2 : 0.7 =$$

b.) Schreiben Sie als Dezimalzahl: (0.5 Punkte)

$$\frac{2}{5} =$$

c.) Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichung: $(x-1)^2 \leq 4$. (1 Punkt)

d.) Gegeben ist die komplexe Zahl: $z = 3 + i$. Wie lautet die zu z Komplex Konjugierte z^*? Wie lautet das Betragsquadrat $|z|^2$? (1 Punkt)

e.) Welche Art von Welle ist Schall? D.h.: welche physikalische(n) Größe(n) bewegen sich in einer Schallwelle fort?

Welche Art von Welle ist eine elektromagnetische Welle? (Welche physikalische(n) Größe(n) bewegen sich in einer elektromagnetischen Welle fort?)

Befinden sich im Hörsaal elektromagnetische Wellen? Können Sie diese ohne Hilfsmittel erkennen (mit Begründung)? (1 Punkt)

f.) Ist die Schreibweise bei den folgenden Gleichsetzungen richtig oder falsch? (Sie können abkürzen mit f/r für falsch/richtig).

I) $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$

II) $\vec{A} = A_x + A_y + A_z$

III) $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$

IV) $\vec{A} = \vec{A}\cdot\vec{e}_x + \vec{A}\cdot\vec{e}_y + \vec{A}\cdot\vec{e}_z$

Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

Aufgabe 2: Taylorreihe und Multipolentwicklung (5 Punkte)

a.) Entwickeln Sie die skalare Funktion

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z) = \sin(x + 2y)$$

in eine Taylorreihe um den Punkt $\vec{r}_0 = (\pi, 0, 0)$ bis zur 2. Ordnung. (2 Punkte)

b.) Schätzen Sie den Wert von $\Phi(\vec{r})$ in der Näherung aus a.) ab am Ort $\vec{r} = (\pi + 0.1, 0.1, 0.1)$. (1 Punkt)

c.) Erklären Sie in einigen Sätzen, was eine Multipolentwicklung ist und orientieren Sie sich dabei an folgenden Fragen: Was wird entwickelt? Welche Terme kennen Sie? In welchen Fällen kann man sich auf die niedrigeren Terme beschränken? (2 Punkte)

b.w.

Aufgabe 3: Maxwell-Gleichungen und Elektromagnetische Wellen (7 Punkte)

q, ω, E_1 und E_2 sind positive Konstanten (ungleich Null), x, y, z sind kart. Koordinaten. t ist die Zeit. Gegeben ist das $\vec{E}$-Feld

$$\vec{E} = E_1 \sin(qz - \omega t)\ \vec{e}_x + E_2 \sin(qz - \omega t + \pi)\ \vec{e}_y.$$

Es soll Teil einer elektromagnetischen Welle sein, bei der sich $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld gegenseitig neu erzeugen. Es seien keine Ströme vorhanden, $\vec{j} = 0$.

a.) Skizzieren Sie den Weg, den die Spitze des $\vec{E}$-Vektors in der E_x-E_y - Ebene verfolgt, d.h. im zweidimensionales Koordinatensystem mit den Achsen E_x und E_y. Markieren Sie in der Skizze die Werte von E_1, E_2 (die Sie frei wählen können), sowie einige Werte von t oder ωt.

Wie nennt man (möglichst konkret) die spezielle Eigenschaft dieser Welle, die in dieser Skizze zum Vorschein kommt? (2 Punkte)

b.) Wie lautet das Gauß-Gesetz in differentieller Form? Untersuchen Sie mit Hilfe des Gauß-Gesetzes explizit, ob es bei der gegebenen Welle freie Ladungen im Raum gibt. (1 Punkt)

c.) Geben Sie eine Maxwell-Gleichung in differenzieller Form an, die geeignet ist, das zugehörige $\vec{B}$-Feld zu bestimmen. Bestimmen Sie dann das $\vec{B}$-Feld.

[Eventuelle Integrationskonstanten setzen Sie Null.](1.5 Punkte)

d.) Zeigen Sie Schritt für Schritt, wie Sie die Maxwell-Gleichung aus c.) in die integrale Form überführen. (1 Punkt)

e.) Erstellen Sie eine Skizze anhand derer Sie das Gesetz aus d.) (in integraler Form!) überprüfen könnten. (Sie können als Beispiel das gegebene $\vec{E}$- und das errechnete $\vec{B}$-Feld verwenden, dürfen aber auch eigene Richtungen der Felder wählen.

Die Skizze muss ein Koordinatensystem mit richtig beschrifteten Achsen, $\vec{E}$- und $\vec{B}$- Feld und alle benötigten Wege, Flächen, Volumina enthalten.

Beschreiben Sie in 1-2 Sätzen, welche Integrale Sie berechnen müssten und beziehen Sie sich dabei auf die Skizze.

Die Rechnung selbst ist **nicht** verlangt. Mitbewertet wird die Verständlichkeit. (1.5 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Relativitätstheorie (7 Punkte)

a.) Zeigen Sie, dass die Größe $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ eine Invariante der Lorentz-Transformation ist (bei Transformation von einem Inertialsystem in ein anderes also ihre Form behält). (2 Punkte)

b.) Ein Raumschiff bewegt sich mit halber Lichtgeschwindigkeit, $v = c/2$. Als es an der Erde vorbeifliegt, zeigen alle Uhren gerade die Zeit $t = t' = 0$ an. Um 1 Uhr Raumschiffzeit hat der Astronaut eine Idee (Ereignis A). Wie groß ist aus seiner Sicht in diesem Zeitpunkt seine Entfernung zur Erde? Welche Zeit zeigen zum Ereignis A die Uhren auf der Erde an? (2 Punkte)

c.) Der Astronaut schickt sofort (um 1 Uhr seiner Zeit) ein Funksignal (mit Lichtgeschwindigkeit) in Richtung Erde. Wann kommt es dort an — in Erd- und in Raumschiffzeit (Ereignis B)? (2 Punkte)

d.) Skizzieren Sie das Raumschiff, die Erde, Ereignis A und Ereignis B in ein Minkowski-Diagramm Ihrer Wahl. Markieren Sie t_A, t'_A, t_B und t'_B auf den entsprechenden Achsen. (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \, \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z$, (Transformation und Einheitsvektoren müssen Sie kennen.)

$$\vec{\nabla} V(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial (r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \left(\frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp} \left(\frac{\partial (r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial \varphi} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp} \right) + \frac{1}{r_\perp^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta)$, $\vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$.
($\vec{r}$ müssen Sie kennen.)

$$\vec{\nabla} V(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial (\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r C_\varphi)}{\partial r} \right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r C_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):
Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.
Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$
Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$
Kugeloberfläche: $df = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$
Zylindermantel: $df = R\, d\varphi\, dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \int\!\!\int\!\!\int \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = \oint\!\!\!\oint \vec{A} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\!\!\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\!\!\int \vec{j} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\, \vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \, |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad = \quad & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\
& + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z \right] + \\
& \quad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$

$$\text{Relativitätstheorie:} \quad \text{LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$