AUFGABEN DER NACHKLAUSUR ZUR THEO. PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2017, Mittwoch, 18.10.17, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf die zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 5 / 4 / 8 / 7 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

Warnung: Beantworten Sie auch dies alles auf den zusätzlichen Schreibvorlagen!

1. Berechnen Sie: (0.5 Punkte)

$$(a) \quad \frac{3}{4} + \frac{1}{6}, \qquad\qquad (b) \quad \log_8 16,$$

2. Welchen Winkel (in Grad oder Bogenmaß) schließen die Vektoren $\vec{A} = (4, \sqrt{20}, 0)$ und $\vec{B} = (3, 0, \sqrt{7})$. miteinander ein? (0.5 Punkte)

3. Zeichnen Sie einige Äquipotenziallinien des Skalarfeldes $\Phi = x + y$ in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie den jeweiligen Wert von Φ auf den entsprechenden Linien. (1 Punkt)

4. Wie gross ist die **geschlossene Oberfläche** eines Zylinders vom Radius R und der Höhe H? (0.5 Punkte)

5. Berechnen Sie: (1 Punkt)

$$\text{(a)} \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{1+x^2}, \qquad \text{(b)} \quad \int x \exp(x^2)\, dx,$$

6. Berechnen Sie den Grenzwert folgender Funktion für $x \to 0$

$$\frac{\sin(3x)}{x}$$

und geben Sie stichwortartig den Rechenweg an (0.5 Punkte – nur mit Begründung bzw. erkennbarer Rechnung)

7. Sind die folgenden Größen Vektorfelder oder Skalarfelder? (Am besten angeben mit Symbolen V/ S)
Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

a.) **Elektrische Ladung:** Vektorfeld Skalarfeld
b.) **Leistung:** Vektorfeld Skalarfeld
c.) **Fluss durch eine Fläche:** Vektorfeld Skalarfeld
d.) **Rotation eines Vektorfeldes:** Vektorfeld Skalarfeld

Aufgabe 2: Elektrischer und magnetischer Fluss (4 Punkte)

a.) Entscheiden Sie, ob die folgenden Sätze zum Fluss eines elektrischen/magnetischen Feldes richtig oder falsch sind: (Es reicht aus, die Nummer mit dem Kürzel "r" oder "f" anzugeben.)

1. Der Fluss eines elektrischen Feldes durch eine eben Kreisfläche ist immer gleich Null.
2. Der Fluss eines elektrischen Feldes durch eine Kugeloberfläche ist immer gleich Null.
3. Der Fluss eines Magnetfeldes durch eine ebene Kreisfläche ist immer gleich Null.
4. Der Fluss eines Magnetfeldes durch eine Kugeloberfläche ist immer gleich Null.

Begründungen sind nicht verlangt, aber falsche Antworten führen zu Punktabzug innerhalb dieser Teilaufgabe. (Je 0.5 Punkte, insgesamt 2 Punkte)

b.w.

b.) Bestimmen Sie das $\vec{E}$-Feld einer Punktladung q_0 mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes in Betrag und Richtung. Es wird hier in 1. Linie die Darstellung des Gaußschen Gesetzes (und seiner inneren Logik) bewertet. Nennen Sie die Voraussetzungen/ Vorinformation über das erwartete Feld, machen Sie eine übersichtliche Skizze, zeigen Sie die verwendete Gauß'sche Fläche, und zeigen Sie die Rechnung auf. Erklären Sie alle verwendeten Symbole in der Skizze! (2 Punkte)

Aufgabe 3: Maxwell-Gleichungen und Wellengleichung (8 Punkte)

q, ω und E_0 sind positive Konstanten (ungleich Null), x, y, z sind kartesische Koordinaten.

a.) Ergänzen Sie die folgenden Maxwell-Gleichungen (im Vakuum). **Schreiben Sie sie sowohl in differenzieller als auch in integraler Form!** (2 Punkte)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \qquad\qquad\qquad , \vec{\nabla} \cdot \vec{E} =$$

b.) Leiten Sie daraus und aus $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ die Wellengleichung für $\vec{E}$ her. Hinweis: Dazu brauchen Sie eine weitere Maxwell-Gleichung. (2 Punkte)

c.) Gegeben ist das Feld:

$$\vec{E} = E_0 \, \sin{(qx - \omega t)} \; \vec{e}_y,$$

und weiterhin $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$.

Überprüfen Sie, ob $\vec{E}$ die Wellengleichung erfüllt, und ob es ggf. Bedingungen zwischen den Konstanten E_0, etc. gibt. Benennen Sie ggf. diese Bedingung. (2 Punkte)

d.) Wie sieht ein $\vec{B}$-Feld aus, das zusammen mit $\vec{E}$ aus c.) die erste Maxwell-Gleichung aus a.) erfüllt? (Mit Rechnung/Begründung) (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 4: Relativitätstheorie: (7 Punkte)

Um 0 Uhr passiert ein Raumschiff die Erde mit der Geschwindigkeit $v = 0.6\,c$. Sowohl die Raumschiff- als auch die Erdzeit beträgt in diesem Moment 0 Uhr.

a.) Um $1h$ Erdzeit schickt die Erde einen Lichtstrahl in Richtung Raumschiff. Zu welcher Erd- und zu welcher Raumschiffzeit kommt er dort an (mit Rechnung!)? (2 Punkte)

b.) Zeichnen Sie für die Situation aus a.) ein Minkowski-Diagramm (Ihrer Wahl), in das Sie auch den Lichtstrahl einzeichnen. (1 Punkt)

c.) Gegeben ist eine Lichtuhr, d.h. zwei ideale parallele Spiegel im Abstand a voneinander, zwischen denen ein Lichtstrahl hin- und hergeht. Die Zeit, die der Lichtstrahl braucht, um einmal hin- und her zu gehen, markiert eine Zeiteinheit τ (z.B. $1\,s$). Die Lichtuhr kann sich entweder im (als ruhend betrachteten) System S oder im relativ dazu mit v bewegten System S' befinden.

Leiten Sie mit Hilfe der Lichtuhr **aber ohne Benutzung der Formeln für die Lorentz-Transformation** die Formel für die Zeitdilatation her.

Fertigen Sie dazu eine oder mehrere Skizzen, aus der Lichtuhr, Beobachter und eventuelle Bewegungsrichtung jeweils klar hervorgehen. Beschreiben Sie in einigen Sätzen, warum der Effekt der Zeitdilatation auftritt, in welchem System sich die Uhr befindet und in welchem System (nach Ihrer Beschreibung) die Zeit langsamer vergeht. Erhalten Sie die LT oder die inverse LT? (Eine Perspektive reicht). (3 Punkte)

d.) Ist eine Lichtuhr wegen der Zeitdilatation ungeeignet zur Zeitmessung oder muss man davon ausgehen, dass die Zeitdilatation auch bei anderen Uhren auftritt? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt – nur mit Begründung!)

1 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Formelsammlung (darf abgerissen werden)

$$\vec\nabla \times (\vec\nabla \times \vec C) = \vec\nabla \cdot (\vec\nabla \vec C) - \vec\nabla^2 \vec C.$$

Zylinderkoordinaten:

$$\vec\nabla V(\rho,\varphi,z) = \vec e_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \vec e_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec e_z \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \vec\nabla \cdot \vec C(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho C_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec\nabla \times \vec C(\rho,\varphi,z) = \vec e_\rho \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec e_\varphi \left(\frac{\partial C_\rho}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial \rho}\right) + \vec e_z \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho C_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_\rho}{\partial \varphi}\right),$$

$$\vec\nabla^2 V(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad \vec r = r_\perp \vec e_{r_\perp} + z \vec e_z.$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$$

$$\vec e_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec e_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec e_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$$

$$\vec\nabla V(r,\vartheta,\varphi) = \vec e_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec e_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec e_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec\nabla \cdot \vec C(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec\nabla \times \vec C(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec e_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi}\right) + \vec e_\vartheta \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec e_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta}\right),$$

$$\vec\nabla^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Vektorbeziehungen: $\vec\nabla \times (\vec\nabla \times \vec C) = \vec\nabla \cdot (\vec\nabla \vec C) - \vec\nabla^2 \vec C$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\,d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec\nabla \cdot \vec A\,dV = \oiint \vec A \cdot d\vec f, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int (\vec\nabla \times \vec A) \cdot d\vec f = \oint \vec A \cdot d\vec r$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec r_i - \vec r_j|}, \quad \phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$\frac{\vec r - \vec r\,'}{|\vec r - \vec r\,'|^3} = -\vec\nabla_r \frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec E(\vec r)\,d\vec r$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int \vec j \cdot d\vec f, \qquad \text{und} \quad \vec j = \rho_V(\vec r)\,\vec v$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r |\vec E(\vec r)|^2$$

b.w.

$$\text{Taylor:}\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$\text{Dipolmoment:}\quad \vec{p}=\sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV$$

$$\text{Dipolpotenzial:}\quad \phi_{\text{Dipol}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}}=-\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}}=-\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r})-\vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\vec{E}\text{-Feld einer Platte:}\quad |\vec{E}|=\sigma/(2\epsilon_0)$$

$$\text{Poisson-Gleichung:}\quad \Delta\phi(\vec{r})=-\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Magn. Moment:}\quad \vec{m}=\frac{1}{2}\int d^3r\,\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})\qquad\to\qquad \vec{m}=\frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:}\quad \vec{m}=IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:}\quad \vec{N}=\vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampère'sches Gesetz:

$$\vec{F}_{12}=\vec{F}_{2\to1}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1 d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:}\quad \vec{B}_2(\vec{r}_1)=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},\quad \vec{F}_{12}=I_1\int_{C_1}d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:}\quad |\vec{B}|=\frac{\mu_0 NI}{\ell},\quad \text{Selbstinduktivität:}\quad L=\mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (falls $\rho=0$, $\vec{j}=0$):

$$\Delta\vec{E}=\frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E},\quad \Delta\vec{B}=\frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B},\qquad k=\frac{\omega}{c'},\quad c'=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$$\text{Relativitätstheorie: LT:}\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct'=\frac{ct-vx/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:}\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct=\frac{ct'+vx'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$