AUFGABEN DER NACHKLAUSUR ZUR THEO. PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2016, Dienstag, 11.10.16, 10:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 4 / 6 / 7 / 7 Summe: 24 (bestanden ab 12 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (4 Punkte)

Erinnerung: Beantworten Sie auch dies alles auf den zusätzlichen Schreibvorlagen!

a.) Welche der folgenden Ausdrücke haben ein ganzzahliges Ergebnis? Berechnen Sie nur diese! [mit ln ist der natürliche Logarithmus gemeint mit log der Logarithmus zur Basis 10.] (1 Punkt)

$$(i) \quad \sqrt{1}+\sqrt{8}, \qquad (ii) \quad 8^{1/3}, \qquad (iii) \quad \log(\mathrm{e}^3), \qquad (iv) \quad \ln(\mathrm{e}^3).$$

b.) Erklären Sie den Begriff "1. Ableitung einer Funktion $f(x)$" **anhand einer Skizze** in 1-2 Sätzen mit mindestens drei (sinnvollen) Begriffen aus folgender Liste: (1 Punkt)

Flächeninhalt, Kurve, Steigung, Länge, Normale, Tangente, Volumen, Parabel, Krümmung, Höhe, Graph

c.) (i) Gegeben ist eine Punktladung q, die sich relativ zum Beobachter mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt ($q \neq 0$, $v \neq 0$). Bewirkt diese Ladung (für den Beobachter) ein elektrisches Feld, ein Magnetfeld oder beides? (0.5 Punkte)

(ii) Wodurch lässt sich der Betrag v der Geschwindigkeit (der Punktladung aus (i)) ändern: durch ein elektrisches Feld, ein Magnetfeld oder beides? (0.5 Punkte)

Keine Begründungen verlangt!

d.) Sind die folgenden Größen Vektoren oder Skalare?
Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

I. **Frequenz:** Vektor Skalar **(Schreibvorlagen benutzen –**
II. **Wellenlänge:** Vektor Skalar **Angabe "V" oder "S" reicht!)**

Aufgabe 2: Ladungen (6 Punkte)

Q, q_0, a, e und b sind positiv definierte Konstanten/ Einheitsgrößen. x, y, z: Kartesische Koordinaten.

a.) Gegeben sind zwei Punktladungen $Q_1 = Q$ am Ort $\vec{r}_1 = (a, a, 2a)$ und $Q_2 = -2Q$ am Ort $\vec{r}_2 = (-a, 2a, a)$.
Wie groß ist das elektrostatische Potenzial dieser beiden Ladungen zusammen?
Welche Arbeit muss man aufbringen, um eine dritte Ladung $Q_3 = q_0$ (unter dem Einfluss von Q_1 und Q_2) vom Ort $(0, 0, 0)$ zum Ort (a, a, a) zu befördern?
(2 Punkte)

b.) Eine Punktladung Q bewegt sich im Einfluss zweier Felder: des elektrischen Feldes $\vec{E} = (e, e, 0)$ und des Magnetfeldes $\vec{B} = (0, 0, b)$. Geben Sie die Bewegungsgleichungen dieses Teilchens nach Newton für seine kartesischen Komponenten an. (2 Punkte)

c.) In einer Kugel befindet sich eine Ladungsverteilung der Dichte $\rho(\vec{r})$. Bei Integration über das Kugelvolumen soll gelten: $\iiint \rho(\vec{r})\, dV = Q$.
Für den elektrischen Fluss Φ soll gelten: Durch die obere Halbkugeloberfläche gehe der Fluss $\Phi = Q/(3\epsilon_0)$.
Welcher Fluss geht durch die untere Halbkugeloberfläche? (2 Punkte)

1 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 3: Elektromagnetische Wellen (7 Punkte)

q, ω und E_0 sind positiv definierte Konstanten/ Einheitsgrößen (ungleich Null), x, y, z sind kartesische Koordinaten.

a.) Schreiben Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x, y, z)$ einer elektromagnetischen Welle (im Vakuum), wenn die Welle folgende Bedingungen erfüllen soll:

- Der Feldvektor $\vec{E}$ soll in der xy-Ebene schwingen.
- Die Welle soll sich in die positive z-Richtung ausbreiten.
- Die Welle soll zirkular polarisiert sein.

Mehrere Lösungen möglich! (3 Punkte)

b.) Zeigen Sie, dass das $\vec{E}$-Feld aus a.) die Wellengleichung erfüllt und geben Sie eventuelle Bedingungen/Einschränkungen an. (2 Punkte)

c.) Berechnen Sie das zur Welle ebenfalls zugehörende $\vec{B}$-Feld. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten. Erläutern Sie daher stichwortartig die verwendete(n) Beziehung(en). Die Rechnung ist explizit verlangt! (Eventuelle zeitunabhängige Summanden setzen Sie Null!
(2 Punkte)

Ersatz: Sollten Sie a.) nicht geschafft haben, so benutzen Sie für b.) und c.) **hilfsweise** das Feld

$$\vec{E} = E_0 \exp[-(qx - \omega t)^2]\, \vec{e}_y.$$

1 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne diesen Ersatz (weitgehend) richtig rechnen.

Aufgabe 4: Relativitätstheorie (7 Punkte)

Ein Raumschiff (System S') fliegt mit der (konstanten) Geschwindigkeit $v = 0.8\,c$ an der Erde vorbei (System S). Als es an der Erde vorbeifliegt, zeigen in S und S' alle Uhren 0 Uhr an. Das Raumschiff steuert eine Raumstation an, die sich (von der Erde aus gesehen) in einer Entfernung von einem halben Lichtjahr und relativ zur Erde ruht.

a.) Um wieviel Uhr (Erdzeit) hat das Raumschiff die Raumstation erreicht (Ereignis A)? Welche Zeit zeigen in diesem Moment die Uhren des Raumschiffs an? (2 Punkte)

b.) Welche Position x'_A hat das Raumschiff beim Erreichen der Raumstation aus seiner eigenen Sicht? (1 Punkt)

c.) Das Raumschiff sendet beim Erreichen der Raumstation einen Lichtstrahl zur Erde. Zu welcher Zeit kommt er dort an (Ereignis B.) Berechnen Sie wahlweise t_B oder t'_B, d.h. Erd- oder Raumschiffzeit (mit korrekter Bezeichnung!). (1 Punkt)

d.) Gegeben ist eine Lichtuhr, d.h. zwei ideale parallele Spiegel im Abstand L voneinander, zwischen denen ein Lichtstrahl hin- und hergeht.

Leiten Sie die Zeitdilatation mit Hilfe der Lichtuhr her und erläutern Sie die Schritte.

Fertigen Sie dazu auch eine Skizze der Lichtuhr. In welchem System befindet sie sich (S oder S'?) Ruht sie oder bewegt sie sich? In welchem System vergeht (nach Ihrer Beschreibung) die Zeit langsamer? (Eine Perspektive reicht). (2 Punkte)

e.) Ist eine Lichtuhr wegen der Zeitdilatation ungeeignet zur Zeitmessung oder muss man davon ausgehen, dass die Zeitdilatation auch bei anderen Uhren (z.B. Quartzuhren) auftritt? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

1 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Formelsammlung

Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla}V(\rho,\varphi,z) = \vec{e}_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho C_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(\rho,\varphi,z) = \vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_\rho}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial \rho}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho C_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_\rho}{\partial \varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$$

$$\vec{e_r} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e_\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e_\vartheta} = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\,d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\!\!\int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

$$\text{Taylor:} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

b.w.

$$\text{Dipolmoment:}\quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r} \rho_V(\vec{r})\, dV$$

$$\text{Dipolpotenzial:}\quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\vec{E}\text{-Feld einer Platte:}\quad |\vec{E}| = \sigma/(2\epsilon_0)$$

$$\text{Poisson-Gleichung:}\quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Magn. Moment:}\quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2} I \int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:}\quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:}\quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampère'sches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1 d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:}\quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},\quad \vec{F}_{12} = I_1\int_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

$$\int_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\int_f \vec{j}\cdot d\vec{f} = \mu_0 I,$$

$$\text{Spule:}\quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell},\quad \text{Selbstinduktivität:}\quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (falls $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$):

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E},\quad \Delta\vec{B} = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B},\qquad k = \frac{\omega}{c'},\quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$$\text{Relativitätstheorie:}\quad \text{LT:}\qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:}\qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$