KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2025, Dienstag, 15.7.25, 8:15 Uhr

Auf S. 3/4 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 5 / 5 / 6 / 7 Summe: 23 (bestanden ab 11.5 Punkten)

Beantworten Sie alles auf dem zusätzlich verteilten Papier (Vorder- oder Rückseiten oder beides)! Unterstreichungen und Antworten auf dieser Vorlage werden nicht gewertet!

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Wie lautet das Coulombgesetz? Bestimmen Sie daraus die SI-Einheit (d.h. in kg, m, s, A) der Dielektrizitätskonstante ϵ_0. (1 Punkt)

b.) Gegeben ist die Geschwindigkeit $v = (2/3)\,c$ mit der Lichtgeschwindigkeit c. Berechnen Sie daraus den Faktor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ und kürzen Sie soweit wie möglich. (0.5 Punkte)

c.) Berechnen Sie x aus

$$x + \frac{3}{x} = 2.$$

(1 Punkt)

d.) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-x}\, \delta(x-1)\, dx$. (0.5 Punkte)

e.) Gibt es elektrische und/oder magnetische Monopole? Skizzieren Sie ggf. jeweils ein Beispiel mit Feldlinien. (1 Punkt)

f.) Gibt es elektrische und/oder magnetische Dipole? Skizzieren Sie ggf. jeweils ein Beispiel mit Feldlinien. (1 Punkt)

Aufgabe 2: Punktladungen (5 Punkte)

Gegeben sind die Punktladungen $Q_1 = q$ am Ort $\vec{r}_1 = (a, a, 0)$ und $Q_2 = 2q$ am Ort $\vec{r}_2 = (2a, 3a, 2a)$.

a.) Berechnen Sie das von den beiden Ladungen gemeinsam erzeugte elektrische Feld. (Setzen Sie alle gegebenen Größen ein.) (1 Punkt)

b.) Welche Kraft üben die beiden Ladungen Q_1 und Q_2 gemeinsam auf eine 3. Ladung $Q_3 = q$ am Ort $(0, 0, 0)$ aus? (1 Punkt)

c.) Welche Arbeit müsste man aufwenden, um Q_1 und Q_2 komplett voneinander zu trennen, d.h. um sie auf einen unendlichen Abstand voneinander zu bringen?

Skizzieren Sie beide Ladungen zu Beginn um die Rechnung zu veranschaulichen (kein Koordinatensystem verlangt!) und erläutern Sie über welchen Weg Sie die beiden (in Ihrer Rechnung) voneinander trennen. (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Gauß'sches Gesetz (6 Punkte)

Bewertet wird bei dieser Aufgabe u.a. die Verständlichkeit der Erklärungen. Schreiben Sie daher einige erklärende Begriffe oder Sätze.

a.) Wie lautet das Gauß'sche Gesetz in differenzieller Form? Zeigen Sie Schritt für Schritt, wie man daraus die entsprechende integrale Form erhält. (1 Punkt)

b.) Das Gauß'sche Gesetz lässt sich bekanntlich nutzen, um $\vec{E}$-Felder von gegebenen Ladungsverteilungen zu berechnen. Nennen Sie eine weitere Möglichkeit (außer dem Gauß'schen Gesetz) um das $\vec{E}$-Feld einer gegebenen Ladungsverteilung zu berechnen (mit Formel(n)). (1 Punkt)

c.) Welche Eigenschaften muss die Ladungsverteilung besitzen, damit man das Gauß'sche Gesetz anwenden kann? Warum? Erklären Sie dies in 1-2 verständlichen Sätzen. (1 Punkt)

d.) Skizzieren Sie einen geladenen Zylinder vom Radius $R > 0$, bei dem das Gauß'sche Gesetz anwendbar ist. Wählen Sie selbst eine passende nicht-konstante Ladungsverteilung (die Sie angeben). Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld im Innern des Zylinders mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes in Betrag und Richtung. Erläutern Sie die einzelnen Schritte anhand der Skizze. Alle verwendeten Größen müssen in der Skizze zu finden sein. (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen und Elektromagnetische Wellen (7 Punkte)

B_0, q und ω sind Konstanten mit positiven Werten.

a.) Wie lautet das Amperesche Durchflutungsgesetz in differenzieller Form? Wie nennt man den Term, den Maxwell diesem Gesetz hinzugefügt hat? Schreiben Sie die entstehende Maxwell-Gleichung (im Vakuum) in differenzieller Form. (1 Punkt)

b.) In der Vorlesung wurden 2 Gründe/Situationen gezeigt, die es nahelegen, dass dieser Zusatzterm notwendig wird, da ansonsten ein Widerspruch/ eine Uneindeutigkeit ensteht. Beschreiben Sie **eine** dieser Überlegungen mit Formel und ggf. Skizze. Es reicht, Widerspruch/ Unklarheit zu beschreiben, Sie müssen nicht beschreiben, warum der Zusatzterm diesen löst.

(2 Punkte)

c.) Gegeben ist das $\vec{B}$-Feld einer elektromagnetischen Welle

$$\vec{B} = B_0 \cos(qx - \omega t)\, \vec{e}_y$$

Ströme I oder Stromdichten $\vec{j}$ sollen nicht vorhanden sein. Berechnen Sie aus diesen Angaben das zur elektromagnetischen Welle gehörende $\vec{E}$-Feld (im Vakuum). (3 Punkte)

d.) In welche Richtung bewegt sich die elektromagnetischen Welle (mit Begründung)? (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla}V(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial\varphi} + \vec{e}_z\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint\vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j\frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int\vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad &= \quad \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \ldots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z\right] + \\ &\qquad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \ldots + \ldots\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie: LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 NI}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$