KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2024, Montag, 8.7.24, 8:00 Uhr

Auf S. 3/4 befindet sich eine Formelsammlung.
Erlaubte Unterlagen: keine (auch keine Taschenrechner)
Zeit: 90 Min

Punkte: 5 / 7 / 5 / 6 Summe: 23 (bestanden ab 11.5 Punkten)

Beantworten Sie alles auf dem zusätzlich verteilten Papier (Vorder- oder Rückseiten oder beides)! Unterstreichungen und Antworten auf dieser Vorlage werden nicht gewertet!

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte)

a.) Bestimmen Sie eine (von insgesamt zwei) Lösungen für x aus der folgenden Gleichung: (1 Punkt)

$$\sqrt{x(x^2+2x+1)} = x+1.$$

b.) Skizzieren Sie Funktion $f(x) = 1/x^2$ in ein Koordinatensystem. Besitzt Sie Unstetigkeitsstellen? Wenn ja, wo? (1 Punkt)

c.) Gegeben ist noch einmal die Funktion $f(x) = 1/x^2$. Wie lautet die Geradengleichung $g(x)$ für die Tangente an $f(x)$ im Punkt $x = 1$? (1 Punkt)

d.) Welche Größe/n pflanzt/pflanzen sich bei Schallwellen in den Raum fort, welche bei Lichtwellen? Welches ist das jeweilige Trägermedium (relativ zu dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt wird)? (1 Punkt)

e.) Verursacht ein stationärer Strom ein Feld? (Falls ja: elektrisches Feld oder Magnetfeld?)

Verursacht er eine elektromagnetische Welle? (1 Punkt)

Aufgabe 2: Elektrisches Feld und Gauß'scher Satz (7 Punkte)

ρ_0, D, q und a sind Konstanten mit positivem Wert.

a.) Gegeben sind die Punktladungen $Q_1 = Q_2 = q$ an den Orten $\vec{r}_1 = (a, 0, 0)$, und $\vec{r}_2 = (2a, 2a, 0)$.

Wie groß ist das von den beiden Ladungen erzeugte elektrische Feld $\vec{E}$? (Setzen Sie alle gegebenen Größen ein.)

Wie groß ist der zugehörige Fluss $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{f}$ über einen Würfel der Seitenlänge $3a$ mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung? (2 Punkte)

b.) Gegeben ist eine in x- und $y-$Richtung unendliche ausgedehnte geladene Platte der Dicke D, der Ladungsdichte $\rho = \rho_0|z|$, die symmetrisch zur xy-Ebene liegt (halb ober-, halb unterhalb).

Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld im ganzen Raum, d.h. sowohl innerhalb als auch außerhalb der Platte in Betrag und Richtung.

Skizzieren Sie in beiden Fällen (2 getrennte Skizzen!) die Platte mitsamt dem erwarteten Feld und Ihrer gewählten Gauß'schen Fläche. Zeigen Sie, durch welche Flächen das Feld hindurchtritt. (3 Punkte)

c.) Untersuchen Sie, ob das $\vec{E}$-Feld am Übergang von innen zu außen stetig ist (Rechnung/Begründung verlangt!) und zeichnen Sie $|\vec{E}|$ als Funktion von z von $-\infty < z < \infty$. (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Relativitätstheorie (5 Punkte)

Um 0 Uhr passiert ein Raumschiff (RS) die Erde mit der Geschwindigkeit $v = (\sqrt{8}/3)\,c$. Sowohl die RS- als auch die Erdzeit beträgt in diesem Moment 0 Uhr.

Hinter dem Raumschiff fliegt (in einiger Entfernung) ein kleineres Objekt (O) mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Raumschiff.

Beantworten Sie alle Fragen rechnerisch!

Geben Sie im Folgenden alle Zeiten/Zeitintervalle in Stunden, und alle Längen in Lichtstunden an. Benennen Sie die Zeiten und Orte klar verständlich als t_A, t'_A, etc.

a.) Das Objekt O passiert die Erde um 1 Uhr Erdzeit (Ereignis A). Zu welcher Zeit und an welchem Ort findet dieses Ereignis aus Sicht des RS statt? (1 Punkt)

b.) Wie groß ist der Abstand zwischen Objekt O und Raumschiff aus Sicht der Erde? (1 Punkt)

c.) Wie groß ist der Abstand zwischen Objekt O und Raumschiff aus Sicht des RS? (1 Punkt)

d.) Erklären Sie in 2-3 verständlichen Sätzen, warum sich die elektromagnetische Kraft, die von einer positiven Ladung erzeugt wird, nicht eindeutig als elektrische bzw. magnetische Kraft interpretieren läßt. Gibt es einen Beobachter, für den sie rein elektrisch/ magnetisch wäre? (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen und Elektromagnetische Wellen (6 Punkte)

a, A und ω sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) mit dem $\vec{E}$-Feld:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left(i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right) \qquad (*)$$

mit den üblichen Konstanten $\vec{k}$ und ω und dem Ortsvektor $\vec{r}$.

a.) Zeigen Sie, dass $\vec{k}$ senkrecht auf $\vec{E}$ steht, indem Sie $(*)$ in eine passende Maxwell-Gl. einsetzen. Was beschreibt der Vektor $\vec{k}$? (2 Punkte)

b.) Warum bezeichnet man diese Wellenform als "ebene Welle"? (Schlagwortartige Begründung reicht, Rechnung ist nicht verlangt). (1 Punkt)

c.) Nehmen Sie an, dass gilt $\vec{k} = (0, \frac{2}{a}, 0)$ und $\vec{E}_0 = (0, 0, A)$. Bestimmen Sie für diesen Fall das $\vec{B}$-Feld, indem Sie eine geeignete Maxwell-Gl. verwenden. Eventuelle Integrationskonstanten können Sie Null setzen. (3 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne den Ersatz (weitgehend) richtig rechnen und erklären.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \, \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla} V(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial (r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial (r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial \varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla} V(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial (\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\!\!\int (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\!\!\int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d=1$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n,\qquad f(x_0+\Delta x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d=3$:

$$\begin{aligned}\phi(\vec r_0+\Delta\vec r) &= \phi(\vec r_0)+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial x}\right|_{\vec r_0}\Delta x+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial y}\right|_{\vec r_0}\Delta y+\left.\frac{\partial\phi(\vec r)}{\partial z}\right|_{\vec r_0}\Delta z+\\ &+\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x^2}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta x+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x\partial y}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta y+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial x\partial z}\right|_{\vec r_0}\Delta x\,\Delta z+\ldots+\left.\frac{\partial^2\phi(\vec r)}{\partial z^2}\right|_{\vec r_0}\Delta z\,\Delta z\right]+\\ &\quad+\ \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen})\ +\ \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen})\quad\ldots+\ldots\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:}\quad \vec p=\sum_j \vec r_j q_j\to\int\vec r\rho_V(\vec r)\,dV\qquad \text{Dipolpotenzial:}\quad \phi_{\text{Dipol}}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}$$

$$\vec E_{\text{Dipol}}=-\vec\nabla\phi_{\text{Dipol}}=-\vec\nabla\frac{\vec r\cdot\vec p}{r^3}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3\vec r(\vec p\cdot\vec r)-\vec p r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:}\quad \Delta\phi(\vec r)=-\frac{\rho_V(\vec r)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie: LT:}\qquad x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct'=\frac{ct-vx/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:}\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\qquad ct=\frac{ct'+vx'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:}\quad \vec m=\frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec r\times\vec j(\vec r))\qquad\to\qquad \vec m=\frac{1}{2}I\int\vec r\times d\vec r,$$

$$\text{... einer Leiterschleife:}\quad \vec m=IF\,\vec n,$$

$$\text{Drehmoment:}\quad \vec N=\vec m\times\vec B,$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec F_{12}=\vec F_{2\to1}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec r_1\times(d\vec r_2\times\vec r_{12})}{r_{12}^3}=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec r_1\cdot d\vec r_2)\frac{\vec r_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:}\quad \vec B_2(\vec r_1)=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec r_2\times\vec r_{12}}{r_{12}^3},\quad \vec F_{12}=I_1\oint_{C_1}d\vec r_1\times\vec B_2(\vec r_1)$$

$$\text{Spule:}\quad |\vec B|=\frac{\mu_0 NI}{\ell},\quad \text{Selbstinduktivität:}\quad L=\mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\quad \frac{\partial\rho(\vec r)}{\partial t}=-\vec\nabla\cdot\vec j(\vec r)$$

Wellengleichungen (für $\rho=0$, $\vec j=0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i,\quad \Delta B_i=\frac{1}{c'^{\,2}}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i,\qquad k=\frac{\omega}{c'},\quad c'=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$