KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2022, Donnerstag, 18.7.22, 8:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 6 / 5 / 7 / 7 Summe: 25 (bestanden ab 12.5 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte)

1. Bringen Sie auf einen einzigen Bruchstrich/ Schreiben Sie als gewöhnlichen Bruch: (1 Punkt)

$$\frac{1}{5}(\frac{25}{2}+\frac{5}{3}), \qquad \sqrt{1-0.64}$$

2. Berechnen Sie alle Ausdrücke, die ein ganzzahliges Ergebnis haben, bei den anderen schreiben Sie "geht nicht": (2 Punkte – Punktabzug bei falschen "geht nicht")

$$\sqrt{7}+\sqrt{2}, \qquad \ln e^2, \qquad \sin^2\frac{\pi}{2}+\cos^2\frac{\pi}{2}, \qquad 2^{2/3}4^{2/3}$$

3. Welche Größen bilden anschaulich die Quellen des elektrischen Feldes? Was wären (falls vorhanden) Quellen des Magnetfeldes? (1 Punkt)

4. Berechnen Sie die Gesamtladung eines Zylinders mit Radius R und Höhe H mit der konstanten Ladungsdichte $\rho = \rho_0$ (1 Punkt)

5. Wofür werden elektromagnetische Wellen benutzt? (Allgemein + 1 Anwendungsbeispiel aus der Praxis). (1 Punkt)

Aufgabe 2: Ladungen und Kräfte (5 Punkte)

ρ_0, a sind positive Konstanten. $\vec{r}$ ist in kartesischen Koordinaten gegeben. r, ϑ, φ: Kugelkoordinaten
Gegeben ist eine Kugel der Ladungsdichte

$$\rho(r,\vartheta,\varphi) = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}\cos^2\vartheta.$$

a.) Skizzieren Sie die Kugel und deuten Sie durch Symbole an, an welchen Stellen die Ladung jeweils positiv/ negativ/ Null ist.

Wie groß ist die Gesamtladung der Kugel? (2 Punkte)

b.) Gegeben sind drei Punktladungen $Q_1 = q$ an $\vec{r}_1 = (0,0,0)$, $Q_2 = -q$ an $\vec{r}_2 = (a,0,a)$ und $Q_3 = q$ an $\vec{r}_3 = (0,a,a)$. Wie groß ist das von allen drei Ladungen gemeinsam erzeugte $\vec{E}$-Feld? Setzen Sie alle Angaben aus der Aufgabenstellung ein und vereinfachen Sie soweit wie möglich! (1 Punkt)

c.) Welche Kraft üben die drei Ladungen aus b.) gemeinsam auf eine weitere Ladung q_0 am Ort (a,a,a) aus? (1 Punkt)

d.) Was bedeutet es anschaulich, dass die Coulombkraft das Gesetz von Actio=Reactio erfüllt? Erläutern Sie dies anhand einer verständlichen Skizze. (1 Punkt)

b.w.

Aufgabe 3: Amperesches Durchflutungsgesetz (7 Punkte)

j_0 und D sind positive Konstanten.

Gegeben ist eine Platte der Dicke D, die in x- und z-Richtung unendlich ausgedehnt ist. Sie werde in z-Richtung über ihre gesamte Breite und Tiefe vom Strom der Stromdichte $\vec{j} = j_0 y^2 \, \vec{e}_z$ durchflossen.

a.) Welche Form des $\vec{B}$-Feldes erwarten Sie (keine Begründung verlangt). (1 Punkt – ganz falsche Annahme kann auch die Punktevergabe im weiteren Teil der Aufgabe beeinflussen)

b.) Berechnen Sie das durch diesen Strom erzeugte Magnetfeld **innerhalb und außerhalb der Platte** nach dem Ampere'schen Durchflutungsgesetz. (Es reicht der Betrag, falls die Richtung korrekt aus Teil a.) hervorgeht.) Erstellen Sie je eine (getrennte) übersichtliche Skizze, aus der jeweils Ihre Ampere'sche Fläche und alle verwendeten Längeneinheiten hervorgehen. (4 Punkte)

c.) Untersuchen Sie, ob das $\vec{B}$-Feld überall stetig ist. Skizzieren Sie den Betrag des Feldes als Funktion von y. (2 Punkte)

1 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Aufgabe 4: Maxwell-Gleichungen (7 Punkte)

E_0, B_0, q und ω seien positive Konstanten.

a.) Schreiben Sie die beiden Maxwell-Gleichungen für die Quellen und Wirbel des $\vec{B}$-Feldes in differenzieller und in integraler Form. Geben Sie jeweils entweder an, wie die Gleichungen heißen, oder was Sie ausdrücken. (2 Punkte)

b.) Im Vakuum (keine freien Ladungen oder Ströme) seien ein $\vec{E}$-und ein $\vec{B}$-Feld gegeben:

$$\vec{E} = E_0 \sin(qx - \omega t) \, \vec{e}_x, \quad \vec{B} = B_0 \sin(qx - \omega t) \, \vec{e}_z.$$

Überprüfen Sie (rechnerisch) **eine der beiden Gleichungen** aus a.) in differenzieller Form und geben Sie am Ende an, ob, bzw. unter welcher Bedingung sie erfüllt ist (1 Punkt).

c.) Überprüfen Sie **die andere der beiden Gleichungen** in integraler Form. Geben Sie auch hier am Ende an, ob, bzw. unter welcher Bedingung sie erfüllt ist. Fertigen Sie eine übersichtliche Skizze, aus der die Geometrie des Integrationsgebietes und die Richtung der beteiligten Felder klar hervorgeht. Das Integrationsgebiet muss so gewählt sein, dass es zur Überprüfung geeignet ist. (3 Punkte)

d.) Abschließende Wertung: Könnten diese beiden Felder gemeinsam eine elektromagnetische Welle bilden? (1 Punkt)

1 Zusatzpunkt, wenn Sie weitgehend richtig rechnen und beschreiben.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z, \qquad \vec{e}_{r_\perp} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0), \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$

$$\vec{\nabla} V(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial (r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r_\perp, \varphi, z) = \vec{e}_{r_\perp} \left(\frac{1}{r_\perp} \frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp} \right) + \vec{e}_z \frac{1}{r_\perp} \left(\frac{\partial (r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial \varphi} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp, \varphi, z) = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left(r_\perp \frac{\partial V}{\partial r_\perp} \right) + \frac{1}{r_\perp^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = r \cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta \cos\varphi, \cos\vartheta \sin\varphi, -\sin\vartheta).$

$$\vec{\nabla} V(r, \vartheta, \varphi) = \vec{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial (\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C}(r, \vartheta, \varphi) =$$

$$= \vec{e}_r \frac{1}{r \sin\vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{1}{r \sin\vartheta} \frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r C_\varphi)}{\partial r} \right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r C_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta} \right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\, d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\, d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\, dr\, d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\, d\varphi\, dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, dV = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{f} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \, \frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int \vec{j} \cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\, \vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 r\, |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \;\; = \;\; & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\ & + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z \right] + \\ & \quad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots \end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Relativitätstheorie:} \quad \text{LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r} \times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m} \times \vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 NI}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$