KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2018, Dienstag, 10.7.18, 8:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Beachten Sie auch die Formelsammlung.

Punkte: 5 / 5 / 4 / 6 / 6 Summe: 26 (bestanden ab 13 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (5 Punkte) a, b, j_0 und q sind Konstanten mit positiven Werten.

Warnung: Beantworten Sie auch dies alles auf den zusätzlichen Schreibvorlagen!

1. Berechnen Sie und vereinfachen Sie so weit wie möglich: (1 Punkt)

$$(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) = \quad , \qquad \frac{\sin(\pi/2)}{\cos\pi} = \quad , \qquad \sqrt{2^8} = \quad , \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{5} = \quad .$$

2. Bestimmen Sie die Stammfunktion: $\int a\,x\,\cos(bx)\,dx$. (1 Punkt)

3. Gegeben ist ein unendlich langer gerader (ruhender) ungeladener Draht. Er wird von der konstanten Stromdichte $\vec{j} = j_0\,\vec{e}_z$ durchflossen. Bewirkt dies außerhalb des Drahtes (ohne Berücksichtigung relativistischer Effekte) ein elektrisches Feld, ein Magnetfeld oder beides? Skizzieren Sie den Draht und einige Feldlinien.

Welcher Einheitsvektor beschreibt die Richtung dieses Feldes? (1 Punkt)

4. Gegeben sind die zwei Punktladungen $Q_1 = 2q$ am Ort $\vec{r}_1 = (-a, a, 0)$ und $Q_2 = -q$ am Ort $\vec{r}_2 = (0, a, a)$. Berechnen Sie das elektrostatische Potenzial Φ dieser Anordnung am Koordinatenursprung. (1 Punkt)

5. Sind die folgenden Größen Vektoren (aus R^3) oder Skalare? (Abkürzungen S/V sind erlaubt.)

a.) (Elektrostatische) Spannung b.) Stromdichte c.) Ladung d.) $\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,dV$

Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

Aufgabe 2: Taylorreihe und Multipolentwicklung (5 Punkte)

a.) Entwickeln Sie die skalare Funktion

$$\Phi(\vec{r}\,) = \sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$$

in eine Taylorreihe um den Punkt $\vec{r}_0 = (0,0,0)$ bis zur 1. Ordnung. (2 Punkte)

b.) Erklären Sie in einigen Sätzen, was eine Multipolentwicklung ist und orientieren Sie sich dabei an folgenden Fragen: Was wird entwickelt? Welche Terme kennen Sie? In welchen Fällen kann man sich auf die niedrigeren Terme beschränken? (2 Punkte)

c.) Geben Sie (eine, zwei oder mehrere) Punktladungen an, die gemeinsam sowohl ein Monopolmoment als auch ein Dipolmoment ungleich Null besitzen. Gefragt sind Ladungen und ihre Ortsvektoren. (1 Punkt)

b.w.

Aufgabe 3: Elektrostatische Energie (4 Punkte)

Q, q_0, a und v_0 sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist ein Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Seitenlängen a im Abstand $5\,a$, mit den Ladungen $\pm Q$. Betrachten Sie das $\vec{E}$-Feld (trotz der Endlichkeit der Platten) als homogen und auf den Bereich zwischen den Platten begrenzt.

a.) Berechnen Sie aus diesen Angaben die im Feld gespeicherte Energie W. (1 Punkt)

b.) Welche Arbeit muss verrichtet werden, um die Ladung auf den beiden Platten von $\pm Q$ auf $\pm 2Q$ zu erhöhen? (1 Punkt)

c.) Die Platten tragen nun wieder die Ladung $\pm Q$. Ein positiv geladenes Teilchen (Ladung q_0, Masse m) wird mit der Geschwindigkeit v_0 (und $v_0^2 = q_0 Q/(ma\epsilon_0)$) senkrecht in Richtung der positiven Platte geschossen. Es startet genau in der Mitte zwischen den Platten. Erreicht es die positive Platte (mit Rechnung)? Falls ja: mit welcher Geschwindigkeit v kommt es an der Platte an? Falls nein: welche Strecke fliegt es, bevor es umkehrt? (Mit Rechnung und Skizze, aus der Bezeichnungen und Lage der Platten hervorgehen).
(2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 4: Kugelkondensator: Gesetz von Gauß (6 Punkte)

Q und R sind Konstanten mit positiven Werten.

Gegeben ist ein Kugelkondensator, d.h. zwei entgegengesetzt geladene konzentrische Kugeln mit jeweils homogener Ladungsdichte. Die innere Kugel vom Radius R trage die Ladung $Q > 0$, die äußere Kugel vom Radius $2R$ trage die Ladung $-Q$.

a.) Wie groß ist die Ladungsdichte ρ auf der äußeren Kugel? (1 Punkt)

b.) Wie lautet (möglichst genau) die Form des elektrischen Feldes, die man als Vorinformation (zum Weiterrechnen) braucht? Begründen Sie in 2-3 verständlichen Sätzen wie sich ein $\vec{E}$-Feld in z-Richtung ausschließen lässt. (2 Punkte)

c.) Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld (in Betrag und Richtung) in den drei Bereichen $r < R$, $R < r < 2R$ und $2R < r$ mit Hilfe des Gauß'schen Gesetzes.

Erstellen Sie dazu für jeden Bereich eine Skizze, aus der die Gauß'sche Fläche und Ihre gewählten Bezeichnungen hervorgehen. (Bewertet wird neben dem Ergebnis auch Klarheit der Bezeichnungen und der Skizzen). (2 Punkte)

d.) Berechnen Sie die Kapazität $C = |Q/U|$ des Kondensators mit Hilfe der Ergebnisse aus c.) (1 Punkt)

1/2 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 5: Maxwell-Gleichungen (6 Punkte)

q, ω, E_0 und B_0 sind positive Konstanten (ungleich Null), x, y, z sind kart. Koordinaten. t ist die Zeit.

Gegeben ist das $\vec{E}$-Feld

$$\vec{E} = E_1 \cos(qx - \omega t)\ \vec{e}_y + E_2 \cos(qx - \omega t)\ \vec{e}_z.$$

Es soll Teil einer elektromagnetischen Welle sein, bei der sich $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld gegenseitig neu erzeugen (ohne freie Ladungen oder Ströme).

a.) Wie lautet das Faraday-Gesetz in differentieller Form? Bestimmen Sie daraus das zu $\vec{E}$ gehörige $\vec{B}$-Feld. [Eventuelle Integrationskonstanten setzen Sie Null.](1,5 Punkte)

b.) Skizzieren Sie ein Quadrat der Seitenlänge a in der xz-Ebene. Wie lautet der Fluss $\iint \vec{B} \cdot d\vec{f}$ durch dieses Quadrat? [Falls Sie a.) nicht geschafft haben, setzen Sie ersatzweise $\vec{B} = \vec{E}$.] (2 Punkte)

c.) Wie lautet das Faraday-Gesetz in integraler Form? (0.5 Punkte)

d.) Berechnen Sie die noch fehlende Seite des Faraday-Gesetzes in integraler Form (d.h. ohne Verwendung der Integralsätze von Gauß und/oder Stokes) und überprüfen Sie das Faraday-Gesetz zusammen mit dem Ergebnis aus b.) (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn Sie ohne "Ersatz" (weitgehend) richtig rechnen.

Formelsammlung

Zylinderkoord.: $\vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z$, (Transformation und Einheitsvektoren müssen Sie kennen.)

$$\vec{\nabla} V(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial r_\perp} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial(r_\perp C_{r_\perp})}{\partial r_\perp} + \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r_\perp,\varphi,z) = \vec{e}_{r_\perp}\left(\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r_\perp}\right) + \vec{e}_z\frac{1}{r_\perp}\left(\frac{\partial(r_\perp C_\varphi)}{\partial r_\perp} - \frac{\partial C_{r_\perp}}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r_\perp,\varphi,z) = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial V}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten: $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$

$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$
($\vec{r}$ müssen Sie kennen.)

$$\vec{\nabla} V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):
Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.
Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$
Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$
Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$
Zylindermantel: $df = R\,d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int\int\vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r\,|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

b.w.

Taylor in $d = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \qquad f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n,$$

Taylor in $d = 3$:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}) \quad = \quad & \phi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta y + \left.\frac{\partial\phi(\vec{r})}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z + \\
& + \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta x + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial y}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta y + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial x \partial z}\right|_{\vec{r}_0} \Delta x\,\Delta z + \cdots + \left.\frac{\partial^2\phi(\vec{r})}{\partial z^2}\right|_{\vec{r}_0} \Delta z\,\Delta z \right] + \\
& \quad + \quad \frac{1}{3!}(\text{3. Ableitungen}) \quad + \quad \frac{1}{4!}(\text{4. Ableitungen}) \quad \cdots + \ldots
\end{aligned}$$

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV \qquad \text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,(\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r})) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampèresches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1\cdot d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1\oint_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) für jede Komponente E_i, B_i:

$$\Delta E_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_i, \quad \Delta B_i = \frac{1}{c'^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_i, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$