KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2017, Dienstag, 11.7.17, 8:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf die zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 6 / 6 / 8 / 6 Summe: 26 (bestanden ab 13 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte)

Warnung: Beantworten Sie auch dies alles auf den zusätzlichen Schreibvorlagen!

1. Schreiben Sie folgende Ausdrücke **soweit möglich** als natürliche Zahl und schreiben Sie "Geht Nicht", wenn das Ergebnis keine natürliche Zahl ist: (1 Punkt)

$$(a)\quad \log_8 64, \qquad (b)\quad \log_{10} 2000, \qquad (c)\quad \sqrt{5}+\sqrt{20}, \qquad (d)\quad \frac{20/3}{4/9}.$$

2. Stehen die beiden Vektoren $\vec{A} = (3, 2, -1)$ und $\vec{B} = (1, -1, 1)$ aufeinander senkrecht? Mit Rechnung oder Begründung)! (0.5 Punkte)

3. Wie lautet das Coulombgesetz (in vektorieller Form)? Schreiben Sie die Formel und erstellen Sie eine (einfache) Skizze, aus der alle verwendeten Größen (außer den Konstanten) hervorgehen – auch die Vektoren! (1 Punkt)

4. Berechnen Sie die Gesamtladung Q eines Zylinders mit Höhe H und Radius R (Grundfläche in der xy-Ebene, symmetrisch zur z-Achse) mit der Ladungsdichte $\rho(r_\perp, \varphi, z) = \rho_0\, r_\perp z$ (2 Punkte).

5. Berechnen Sie: (0.5 Punkte)

$$\text{(a)} \quad \frac{d}{dx}\sin^2(3x).$$

6. Sind die folgenden Größen Vektorfelder oder Skalarfelder? (Am besten angeben mit Symbolen V/ S)
Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

(a.) **Ladungsdichte** (b.) **Stromdichte** (c.) **Flächennormale**
(d.) **Maxwell'scher Verschiebungsstrom**

Aufgabe 2: Punktladungen (6 Punkte)

a und q_0 sind positive Konstanten.

Gegeben sind die 3 Punktladungen $Q_1 = q_0$ am Ort $\vec{r}_1 = (0, 0, 0)$, $Q_2 = 2q_0$ am Ort $\vec{r}_2 = (a, a, a)$ und $Q_3 = 3q_0$ am Ort $\vec{r}_3 = (a, 2a, 2a)$.

In den folgenden Aufgaben müssen diese Werte passend eingesetzt werden und alles so weit wie möglich vereinfacht werden! Ausdrücke wie z. B. $(x - a)^2$ dürfen stehenbleiben.

In jeder Teilaufgabe sollen nur diejenigen Ladungen vorhanden sein, die im jeweiligen Text erwähnt sind (in (a.) also z.B. nur Q_1 und Q_2)!

a.) Welches Feld wird von den beiden Ladungen Q_1 und Q_2 (im ganzen Raum) erzeugt? (1 Punkt)

b.) Welche Kraft übt die Ladung Q_1 auf die Ladung Q_2 aus? (1 Punkt)

c.) Welche Arbeit muss man verrichten, um die Ladung Q_3 im Feld von Q_1 vom Ort $(0, a, a)$ zum Ort $(0, 2a, a)$ zu befördern? (2 Punkte)
Hinweis: Die benötigte Stammfunktion lässt sich leicht erraten.

d.) Welchen elektrischen Fluss erzeugt das (gemeinsame) Feld aller 3 Ladungen durch die Oberfläche einer Kugel vom Radius $2a$ mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung? (Mit Begründung!) (2 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 3: Maxwell-Gleichungen (8 Punkte)

q, ω, E_0 und B_0 sind positive Konstanten (ungleich Null), x, y, z sind kartesische Koordinaten.

a.) Ergänzen Sie die folgende Maxwell-Gleichung (im Vakuum). **Schreiben Sie sie sowohl in differenzieller als auch in integraler Form!** (1 Punkt)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} =$$

b.) Gegeben sind die beiden Felder

$$\vec{E} = E_0 \sin(qx - \omega t)\, \vec{e}_y, \qquad \vec{B} = B_0 \sin(qx - \omega t)\, \vec{e}_z,$$

außerdem (erst jetzt!) $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$.

Überprüfen Sie, ob beide zusammen (als elektrisches Feld und Magnetfeld) die oben angegebene Maxwell-Gleichung in differenzieller Form erfüllen (können), und ob es ggf. Bedingungen zwischen den Konstanten E_0, B_0, q, ω gibt. (2 Punkte)

c.) Überprüfen Sie, ob die beiden Felder aus b.) die oben angegebene Maxwell-Gleichung in integraler Form erfüllen (ohne Verwendung der Integralsätze von Gauß und Stokes!). Erstellen Sie dazu eine Skizze, aus der Ihre gewählten Integrationsgebiete eindeutig hervorgehen. Wählen Sie diese so, dass nicht beide Seiten der Maxwell-Gleichung trivial Null werden. (3 Punkte)

d.) In welche Richtung bewegt sich die dargestellte Welle? (1 Punkt)

e.) Wie lautet das $\vec{E}$-Feld einer zirkular polarisierten Welle, die sich in die positive z-Richtung ausbreitet? (1 Punkt)

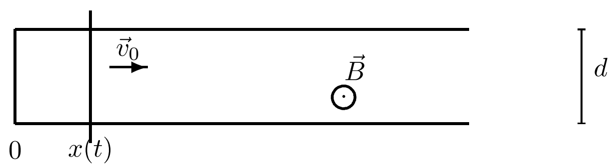
1/2 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 4: Magnetfelder: (6 Punkte)

B, d, v_0, I und R sind positive Konstanten.

Warnung: Diese Aufgabe ähnelt einer Hausaufgabe, hat aber auch einige Unterschiede, so z.B. keine eigene Spannungsquelle!

Gegeben ist ein U-förmiger, nach rechts unendlich ausgedehnter Stromleiter vom Widerstand $R = 0$ mit dem Abstand d zwischen den beiden parallelen Armen. Auf ihnen befinde sich ein leitender Draht mit Widerstand R und Masse m, der den Stromkreis schließt (siehe Abb.). Sein Abstand zum linken Rand der Anordnung sei $x(t)$. Senkrecht zu dieser Anordnung wirke ein konstantes (über die gesamte Zeichenebene ausgedehntes) Magnetfeld $\vec{B}$, das aus der Papierebene herauszeige. Der Draht werde mit der **konstanten** Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegt.



a.) Berechnen Sie den Strom $I(t)$, der durch diese Anordnung fließt (in Abhängigkeit von den gegebenen Konstanten). (3 Punkte)

b.) Durchläuft der Strom (technische Stromrichtung) den Stromkreis im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn? Begründen Sie Ihre Antwort in 2-3 Sätzen mit Hilfe von passenden Formeln! (1.5 Punkte)

c.) Gegeben sei ein (neuer) Leiter, der durch die folgende Parametrisierung beschrieben wird. Skizzieren Sie ihn in ein geeignetes Koordinatensystem und markieren Sie die Stromrichtung durch einen Pfeil: (1 Punkt)

$$\vec{r} = (\cos\varphi, \sin\varphi - 1, 0) \quad \text{für (Stromrichtug):} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

d.) Der Leiter aus c.) soll vom Strom I durchflossen werden (technische Stromrichtung wie von $\vec{r}$ vorgegeben). Wie lautet das magnetische Moment $\vec{m}$ dieser Anordnung? (0.5 Punkte)

1/2 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Formelsammlung (darf abgerissen werden)

Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla}V(\rho,\varphi,z) = \vec{e}_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho C_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(\rho,\varphi,z) = \vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial C_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_\rho}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial \rho}\right) + \vec{e}_z \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho C_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial C_\rho}{\partial \varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad \vec{r} = r_\perp \vec{e}_{r_\perp} + z\vec{e}_z.$$

Kugelkoordinaten:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi \quad z = r\cos\vartheta$$

$$\vec{e}_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, cos\vartheta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0), \quad \vec{e}_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta).$$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi) = \vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi) =$$

$$= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi) - \frac{\partial C_\vartheta}{\partial \varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial C_r}{\partial \vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2 V(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds = R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds = R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df = r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df = R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df = R\,d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:} \quad \iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \oiint \vec{A}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{Stokes:} \quad \int\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:} \quad \phi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} = -\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:} \quad U = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:} \quad I = \int \vec{j}\cdot d\vec{f}, \qquad \text{und} \quad \vec{j} = \rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:} \quad E_g = \frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

$$\text{Taylor:} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

b.w.

$$\text{Dipolmoment:}\quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r}\rho_V(\vec{r})\,dV$$

$$\text{Dipolpotenzial:}\quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\vec{E}\text{-Feld einer Platte:}\quad |\vec{E}| = \sigma/(2\epsilon_0)$$

$$\text{Poisson-Gleichung:}\quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Magn. Moment:}\quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\,\vec{r}\times\vec{j}(\vec{r}) \qquad \to \qquad \vec{m} = \frac{1}{2}I\int \vec{r}\times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:}\quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:}\quad \vec{N} = \vec{m}\times\vec{B},$$

1. Ampère'sches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1\times(d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1 d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:}\quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_{C_2}\frac{d\vec{r}_2\times\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},\quad \vec{F}_{12} = I_1\int_{C_1} d\vec{r}_1\times\vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

$$\text{Spule:}\quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 NI}{\ell},\quad \text{Selbstinduktivität:}\quad L = \mu_r\mu_0\frac{N^2}{\ell}f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:}\quad \frac{\partial\rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (falls $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$):

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E},\quad \Delta\vec{B} = \frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B},\qquad k = \frac{\omega}{c'},\quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$$\text{Relativitätstheorie: LT:}\qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:}\qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$