KLAUSURAUFGABEN ZUR THEORETISCHEN PHYSIK II (LAK)

Sommersemester 2016, Dienstag, 12.7.16, 8:15 Uhr

Sie schreiben bitte ausschließlich auf den zusätzlich verteilten Schreibvorlagen!
Benutzen Sie davon wahlweise Vorder- oder Rückseiten oder beides.
Beginnen Sie für jede Aufgabe eine neue Seite! (Egal ob Vorder- oder Rückseite)
Am Ende befindet sich eine Formelsammlung.

Punkte: 6 / 7 / 6 / 7 Summe: 26 (bestanden ab 13 Punkten)

Aufgabe 1: Grundwissen (6 Punkte)

ρ_0 und q sind positive Konstanten.

Warnung: Beantworten Sie auch dies alles auf den zusätzlichen Schreibvorlagen!

1. Berechnen Sie (und vereinfachen Sie so weit wie möglich): (1 Punkt)

$\frac{2-2x}{\frac{1-x^2}{1+x}} =$ (Schreibvorlagen!) $\log_9 27 =$ (Schreibvorlagen!)

2. Skizzieren Sie die folgende zusammengesetzte Funktion für $x > 0$ und geben Sie an, ob sie am Punkt $x = 1$ stetig ist (Mit Begründung/Rechnung – Skizze muss nicht maßstäblich sein)! (1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1 & \text{für} \quad x \leq 1, \\ \ln x, & \text{für} \quad x > 1. \end{cases}$$

3. Gegeben ist ein unendlich langer (unendlich dünner) gerader (ruhender) Draht, der die konstante negative (Linien-)Ladungsdichte $-\rho_0$ trägt. Bewirkt diese Ladungsdichte ein elektrisches Feld, ein Magnetfeld oder beides? Skizzieren Sie den Draht und einige Feldlinien. (1 Punkt)

4. Gegeben sind die zwei Punktladungen $Q_1 = 2q$ am Ort $\vec{r}_1 = (-a, 0, 0)$ und $Q_2 = -5q$ am Ort $\vec{r}_2 = (0, a, 0)$. Berechnen Sie das $\vec{E}$-Feld dieser Anordnung am Koordinatenursprung. (1 Punkt)

5. Durch welche Art von Flächen ist der magnetische Fluss gleich Null? (Begriff oder Skizze!) (1 Punkt)

6. Sind die folgenden Größen Vektorfelder oder Skalarfelder?
Nicht raten, falsche Antwort gibt Punktabzug (innerhalb dieser Teilaufgabe) (1 Punkt)

a.) **Elektrostatisches Potenzial:** Vektorfeld Skalarfeld **(Schreibvorlagen benutzen)**
b.) **Stromdichte:** Vektorfeld Skalarfeld

Aufgabe 2: Ladung und Gauß'sches Gesetz (7 Punkte)

R und ρ_0 sind positive Konstanten. $r_\perp$, φ, z: Zylinderkoordinaten

Gegeben sei ein in z-Richtung unendlich ausgedehnter Zylinder vom Radius R mit der z-Achse als Symmetrieachse. Er trage die (Volumen-)Ladungsdichte:

$$\rho(r_\perp, \varphi, z) = \rho_0 \exp[-r_\perp^2], \quad \text{für} \quad r_\perp \leq R, \qquad (\text{ansonsten ist } \rho = 0)$$

a.) Berechnen Sie die Ladung dieses Zylinders, die sich in einem Segment der Höhe $\Delta z = H$ befindet. (2 Punkte)

b.) Welche Richtung besitzt das $\vec{E}$-Feld dieses Zylinders? Begründen Sie durch ein Symmetrieargument (mit Skizze!), warum es nicht in Richtung von $\vec{e}_\varphi$ zeigen kann. Das Symmetrieargument muss in Worten verständlich erklärt und auf diesen speziellen Fall sinnvoll angewandt werden. (2,5 Punkte)

c.) Berechnen Sie wahlweise das $\vec{E}$-Feld innerhalb **oder** außerhalb des Zylinders und geben Sie an, ob Sie $\vec{E}_{\text{innen}}$ oder $\vec{E}_{\text{außen}}$ gewählt haben **(sonst keine Punkte)!**

Welchen Wert besitzt $\vec{E}$ für $r_\perp = R$?

Erstellen Sie zu Ihrer Rechnung außerdem eine Skizze, die den Zylinder und Ihre gewählte Gaußfläche zeigt, sowie alle selbst eingeführten Symbole erklärt. (2,5 Punkte)

1 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 3: Maxwell-Gleichungen (6 Punkte)

q, ω, E_0 und B_0 sind positive Konstanten (ungleich Null), x, y, z sind kartesische Koordinaten.

a.) Ergänzen Sie die folgenden Maxwell-Gleichungen: (0.5 Punkte)

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{(Schreibvorlagen!)}, \qquad (2) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{(Schreibvorlagen!)}$$

b.) Nennen Sie entweder den Namen oder die Grundaussage dieser Gleichungen. (0.5 Punkte)

c.) Wie lautet in beiden Fällen jeweils die integrale Form? (1 Punkt)

d.) Gegeben seien die Felder:

$$\vec{E} = E_0 \sin(qz - \omega t)\, \vec{e}_y, \qquad \vec{B} = B_0 \cos(qz - \omega t)\, \vec{e}_z.$$

Betrachten Sie nun **eine der beiden Maxwell-Gleichungen aus a.) in differentieller und eine in integraler Form** und überprüfen Sie explizit, ob die gegebenen Felder (als elektrisches, bzw. Magnetfeld) diese Gleichungen erfüllen.

Zu beachten: Sie können wählen, welche Gleichung Sie lieber in integraler und welche in differenzieller Form bearbeiten. (Für die integrale Form dürfen Sie die Integralsätze von Gauss und Stokes **nicht** benutzen, sondern müssen alle Beiträge ausintegrieren!

Erstellen Sie für die Rechnung in integraler Form eine übersichtliche Skizze, aus der Ihr Integrationsgebiet und die Richtung der Felder deutlich hervorgeht! Bei Gleichung (1) dürfen dabei nicht beide Seiten der Gleichung trivial Null werden.

(4 Punkte)

1 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Aufgabe 4: Magnetfelder (7 Punkte)

Gegeben ist ein unendlich langer dünner Draht, der gebogen ist, wie in der Abb. gezeigt (unendlich langes horizontales Stück $-$ Viertelkreis vom Radius R $-$ unendlich langes vertikales Stück) und der vom Strom I (Pfeilrichtung) durchflossen wird.

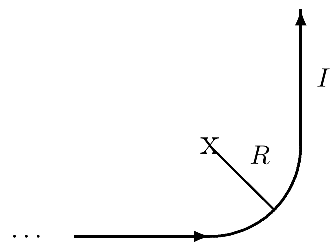
a.) Skizzieren Sie die Feldlinien, die Sie für diesen Strom (ungefähr) erwarten in allen drei Teilstücken (jeweils an mehreren Stellen). **Übertragen Sie die Skizze dazu auf Ihr Blatt!** (0,5 Punkt)

b.) Berechnen Sie das $\vec{B}$-Feld am Punkt, der durch ein x bezeichnet ist (Kreismittelpunkt, aus dem der Viertelkreis geschnitten ist) nach dem Gesetz von Biot-Savart. Legen Sie Ihr Koordinatensystem selbstständig.

Erstellen Sie dazu eine Skizze, aus der das gewählte Koordinatensystem hervorgeht. Die Skizze muss nicht schön sein, aber verständlich. **Keine Punkte ohne Skizze!** (6,5 Punkte)

Benutzen Sie an gegebener Stelle eine der folgenden Stammfunktionen:

$$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+a^2)^3} + C, \quad \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2-x^2}) + C$$



1 Zusatzpunkt, wenn (fast) alles richtig ist.

Formelsammlung

Zylinderkoordinaten:

$$\vec{\nabla}V(\rho,\varphi,z)=\vec{e}_\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\vec{e}_z\frac{\partial V}{\partial z},\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{C}(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho C_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial C_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(\rho,\varphi,z)=\vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial C_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial C_\varphi}{\partial z}\right)+\vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial C_\rho}{\partial z}-\frac{\partial C_z}{\partial\rho}\right)+\vec{e}_z\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho C_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial C_\rho}{\partial\varphi}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2V(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}.$$

Kugelkoordinaten:

$$x=r\sin\vartheta\cos\varphi,\quad y=r\sin\vartheta\sin\varphi\quad z=r\cos\vartheta$$

$$\vec{e_r}=(\sin\vartheta\cos\varphi,\sin\vartheta\sin\varphi,cos\vartheta),\quad \vec{e_\varphi}=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0),\quad \vec{e_\vartheta}=(\cos\vartheta\cos\varphi,\cos\vartheta\sin\varphi,-\sin\vartheta).$$

$$\vec{\nabla}V(r,\vartheta,\varphi)=\vec{e}_r\frac{\partial V}{\partial r}+\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\vartheta}+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{C}(r,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2C_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(\sin\vartheta C_\vartheta)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_\varphi}{\partial\varphi},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C}(r,\vartheta,\varphi)=$$

$$=\vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta C_\varphi)-\frac{\partial C_\vartheta}{\partial\varphi}\right)+\vec{e}_\vartheta\left(\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial C_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(rC_\varphi)}{\partial r}\right)+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rC_\vartheta)}{\partial r}-\frac{\partial C_r}{\partial\vartheta}\right),$$

$$\vec{\nabla}^2V(r,\vartheta,\varphi)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}.$$

Kurven- und Flächenelemente (Richtungsvektoren bitte selbst überlegen!):

Kreislinie (Radius R) in oder parallel zu xy-Ebene: $ds=R\,d\varphi$.

Kreislinie (Radius R) entlang Längengrad: $ds=R\,d\vartheta$

Kreisfläche in oder parallel zu xy-Ebene: $df=r\,dr\,d\varphi$

Kugeloberfläche: $df=R^2\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$

Zylindermantel: $df=R\;d\varphi\,dz$

Integralsätze:

$$\text{Gauss:}\quad\iiint\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV=\oint\!\!\!\!\oint\vec{A}\cdot d\vec{f},\qquad\text{Stokes:}\quad\int\!\!\int(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{f}=\oint\vec{A}\cdot d\vec{r}$$

$$\text{Potenzial:}\quad\phi(\vec{r}_i)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_j\frac{q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|},\quad\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho_V(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}=-\vec{\nabla}_r\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\text{Spannung:}\quad U=-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{E}(\vec{r})\,d\vec{r}$$

$$\text{Strom und Stromdichte:}\quad I=\int\vec{j}\cdot d\vec{f},\qquad\text{und}\quad\vec{j}=\rho_V(\vec{r})\,\vec{v}$$

$$\text{Energie:}\quad E_g=\frac{\epsilon_0}{2}\int d^3r|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

$$\text{Taylor:}\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

b.w.

$$\text{Dipolmoment:} \quad \vec{p} = \sum_j \vec{r}_j q_j \to \int \vec{r} \rho_V(\vec{r})\, dV$$

$$\text{Dipolpotenzial:} \quad \phi_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{Dipol}} = -\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\vec{r}(\vec{p}\cdot\vec{r}) - \vec{p}r^2}{r^5}$$

$$\vec{E}\text{-Feld einer Platte:} \quad |\vec{E}| = \sigma/(2\epsilon_0)$$

$$\text{Poisson-Gleichung:} \quad \Delta\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_V(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

$$\text{Magn. Moment:} \quad \vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\, \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) \qquad \to \quad \vec{m} = \frac{1}{2} I \int \vec{r} \times d\vec{r},$$

$$\text{... einer Leiterschleife:} \quad \vec{m} = IF\,\vec{n},$$

$$\text{Drehmoment:} \quad \vec{N} = \vec{m} \times \vec{B},$$

1. Ampère'sches Gesetz:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{2\to 1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}(d\vec{r}_1 d\vec{r}_2)\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3},$$

$$\text{Biot-Savart:} \quad \vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\int_{C_2}\frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}, \quad \vec{F}_{12} = I_1 \int_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1)$$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

$$\int_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_f \vec{j}\cdot d\vec{f} = \mu_0 I,$$

$$\text{Spule:} \quad |\vec{B}| = \frac{\mu_0 N I}{\ell}, \quad \text{Selbstinduktivität:} \quad L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2}{\ell} f$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung:} \quad \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r})$$

Wellengleichungen (falls $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$):

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}, \quad \Delta\vec{B} = \frac{1}{c'^{\,2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}, \qquad k = \frac{\omega}{c'}, \quad c' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_r\mu_r}}$$

Poynting-Vektor: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$

$$\text{Relativitätstheorie: LT:} \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\text{Inv. LT:} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$