

Wiederholung vom 21.10.2004

Elektromagnetische Wellen

$$\begin{aligned}\text{Maxwell-Gleichungen} \quad \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \vec{D} &= \rho \\ \nabla \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Im Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}; \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}; \vec{j} = 0; \rho = 0$

Wellengleichung durch Bildung der Rotation:

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

drei Wellengleichungen (für jede Komponente):

Allgemeine Lösung (für eine Komponente, Skalar):

$$\Psi(\vec{r}, t) = C_1 f\left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \vec{r} - vt\right) + C_2 g\left(\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \vec{r} + vt\right)$$

Spezialfall harmonische Wellen:

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\text{Wellenlänge: } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Frequenz: } \omega = \frac{2\pi}{T}; T = \lambda / v$$

Lineare DGL \Rightarrow Linearkombination von Lösungen ist wieder eine Lösung

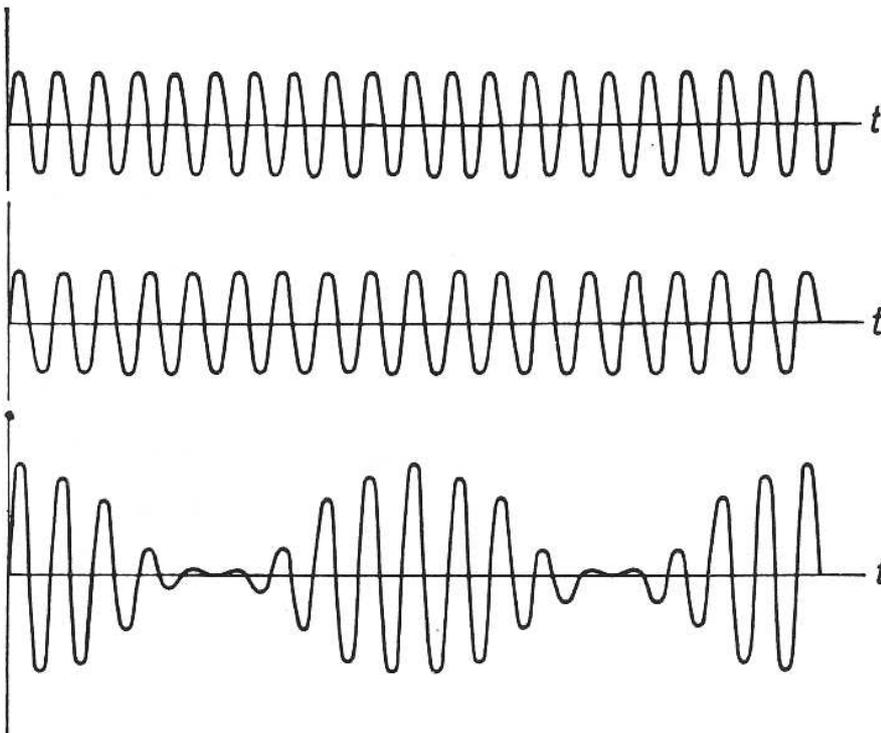
Einige wichtige Konzepte im Zusammenhang mit Wellen

Schwebung:

Überlagerung zweier Wellen mit fast gleicher Frequenz und fast gleichem Wellenvektor

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}, t) &= \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \cos(k_2 x - \omega_2 t) = \\ &2 \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\end{aligned}$$

amplitudenmodulierte Welle (Modulation der Intensität, keine zwei Frequenzen wahrnehmbar).



Punkte mit gleicher Auslenkung (konstante Phase der Amplitude):

$$\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t = \text{const.} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (\text{Gruppengeschwindigkeit})$$

Punkte mit gleicher Phase des harmonischen Anteils:

$$k_1 + k_2 = 2k; \omega_1 + \omega_2 = 2\omega; kx - \omega t = \text{const.} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

(Phasengeschwindigkeit)

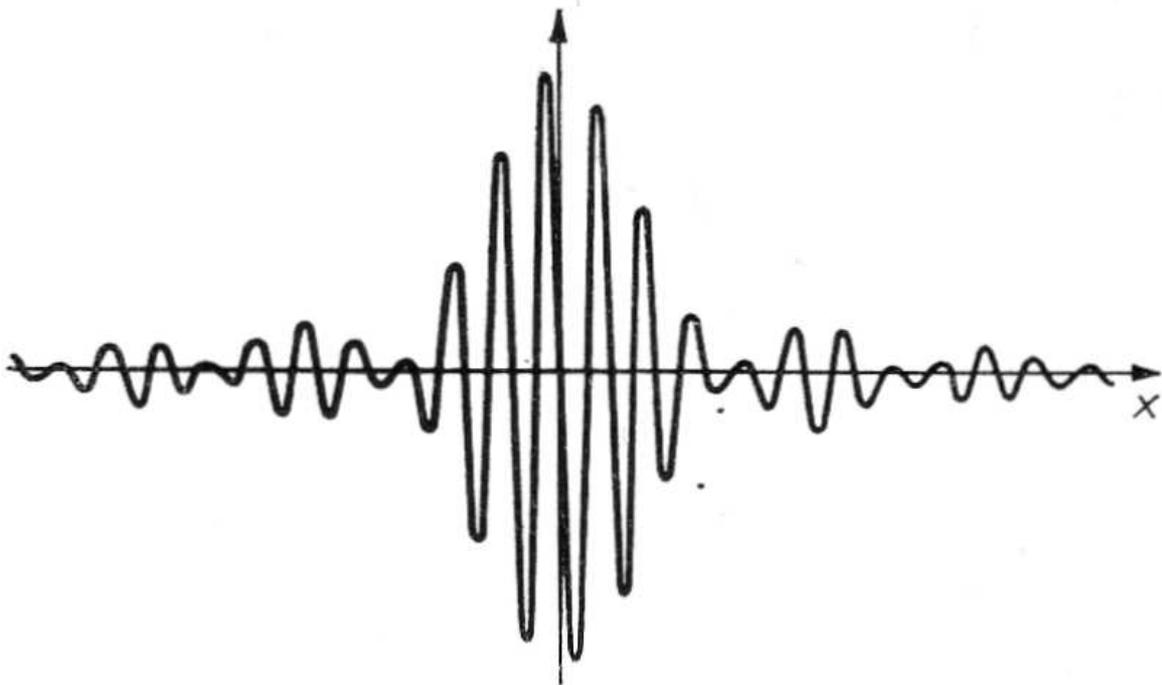
Wellenpaket:

Überlagerung von Wellen mit kontinuierlicher Verteilung von Wellenvektoren:

$$\Psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} a(k) \cos[kx - \omega(k)t] dk$$

näherungsweise:

$$\Psi(x, t) = 2a(k_0)\Delta k \frac{\sin \Delta k \left(x - \frac{d\omega}{dk}t\right)}{\Delta k \left(x - \frac{d\omega}{dk}t\right)} \cos(k_0 x - \omega_0 t)$$



Gruppengeschwindigkeit: $v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$