Wiederholung vom 06.11.2004

Mehrstrahlinterferenz

Phasenunterschiede zwischen den Teilwellen $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s + \delta\varphi$
Phasensprung an den Grenzflächen $\delta\varphi = 0, \pm\pi$
Aufsummieren der Amplituden der p Teilwellen
(geometrische Reihe $p \to \infty$)

$$A = \pm A_0 \sqrt{R}\left[1 - (1-R)e^{i\Delta\varphi}\sum_{n=0}^{p-2} R^n e^{in\Delta\varphi}\right] \approx$$

$$\pm A_0 \sqrt{R}\,\frac{1-e^{i\Delta\varphi}}{1-Re^{i\Delta\varphi}}$$

$$\Rightarrow I_R = A \cdot A^* = I_0 R \frac{2-2\cos\Delta\varphi}{1+R^2-2R\cos\Delta\varphi} = I_0 \frac{4R\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

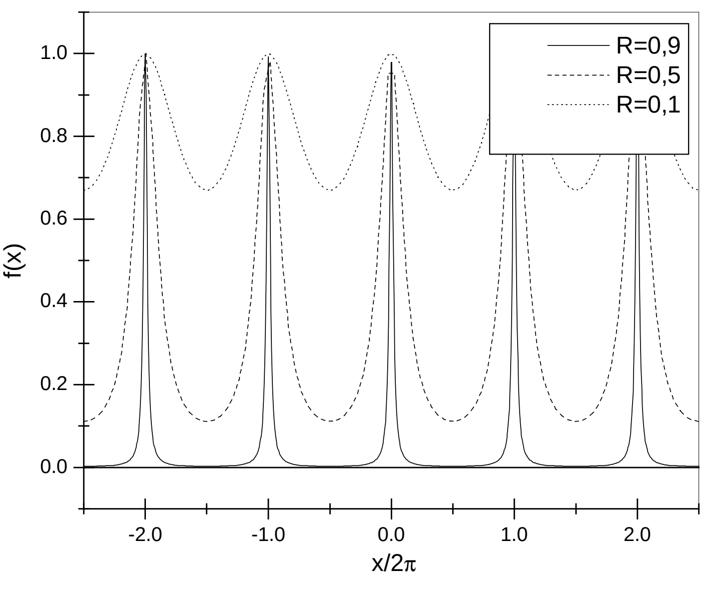
Mit der Abkürzung $F = \frac{4R}{(1-R)^2} \Rightarrow$

$$\frac{I_R}{I_0} = \frac{F\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{1+F\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

und $$\frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{1+F\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}$$ (Airy-Formeln)

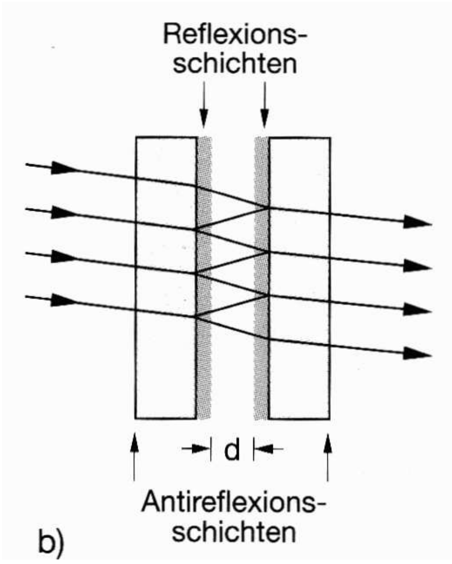
Airy-Funktion

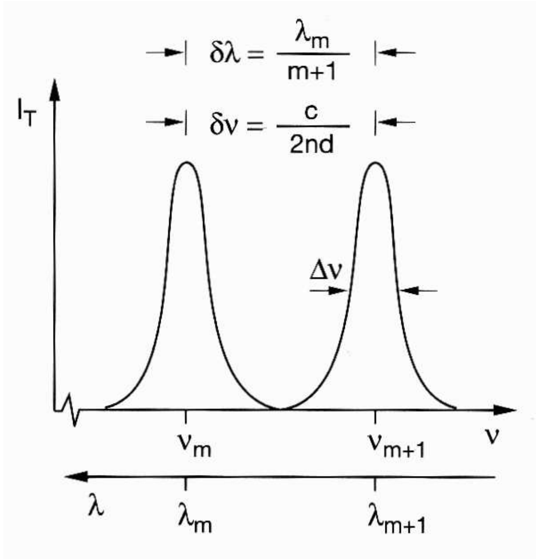
$$f(x) = \frac{1}{1+F\sin^2\frac{x}{2}}$$



Hohe Reflektivität bedeutet, dass viele Strahlen miteinander interferieren, Maxima werden sehr scharf.

Fabry-Perot-Interferometer





Mehrstrahlinterferenz, Abstand zweier Maxima heißt freier Spektralbereich (Abstand zweier Beugungsordnungen). Für senkrechten Einfall :

$$\delta\lambda = \lambda_m - \lambda_{m+1} = \frac{2nd}{m} - \frac{2nd}{m+1} = \frac{\lambda_m}{m+1}$$

Für die Frequenzen $\delta\nu = \nu_{m+1} - \nu_m = \dfrac{c}{2nd}$

Breite der Maxima bestimmt die Auflösung $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$

Halbwertsbreiten γ der Maxima der Airy-Funktion

$$\frac{1}{1 + F\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} \approx \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{F}} \Rightarrow \gamma = 2x = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

Maß für die Güte eines Fabry-Perot-Interferometers ist die Finesse $\mathscr{F}$ = freier Spektralbereich/Auflösung

$$\mathscr{F} = \frac{\delta\nu}{\Delta\nu} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}$$

$\mathscr{F}$ ist die Zahl p der Teilwellen, die zur Interferenz kommen

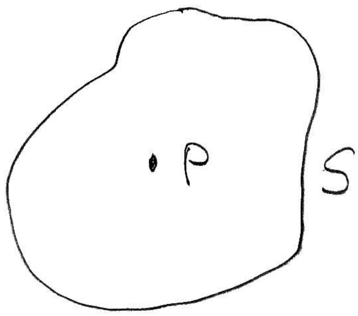
$$\delta\nu = \frac{c}{\Delta s} \qquad \Delta\nu = \frac{c}{p\Delta s} \Rightarrow \mathscr{F} = p$$

Kirchhoffsche Beugungstheorie

Lösung der Helmholtzgleichung für die Wellen-Amplituden (skalare Beugungstheorie – elektromagnetische Wellen eigentlich Vektorgrößen!)

$$\Delta E = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad E(\vec{r},t) = A(\vec{r})e^{i\omega t}$$

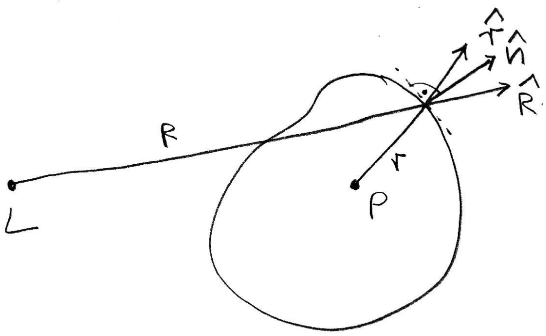
$$\Rightarrow \Delta A(\vec{r}) + k^2 A(\vec{r}) = 0$$



Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktionen liefert Kirchhoffsches Integraltheorem

$$A_P = \frac{1}{4\pi}\left(\int_S \frac{e^{ikr}}{r}\nabla A(\vec{r})ds - \int_S A(\vec{r})\nabla\frac{e^{ikr}}{r}ds\right)$$

Kugelwelle von L ausgehend liefert für $R >> \lambda$, $r >> \lambda$

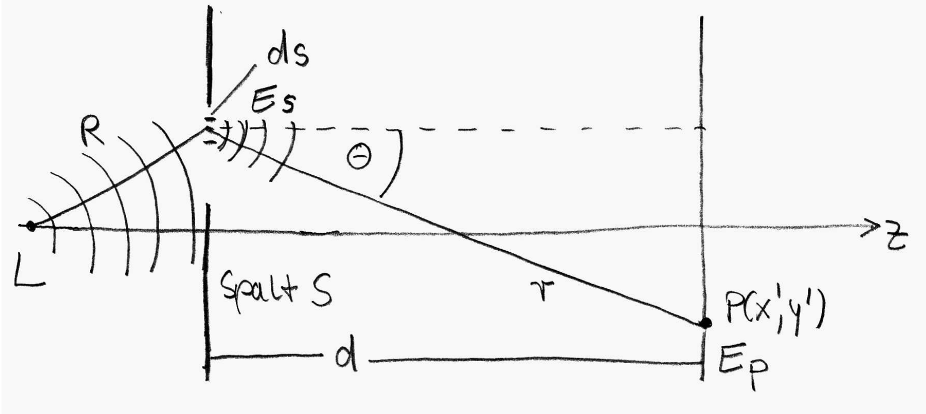


$$A_P = -\frac{ikA}{4\pi}\int_S \frac{e^{ik(r+R)}}{R\cdot r}(\hat{n}\hat{r} - \hat{n}\hat{R})ds$$

Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral

Fresnel-Huygensches Prinzip

punktförmige Lichtquelle L



Feldstärke am Spaltelement *ds* $$E_s = \frac{A}{R} e^{ikR}$$

Feldstärke am Punkt P

$$dE_P = C(\Theta) E_s \frac{e^{ikr}}{r} ds$$

$$E_P = \int_S C E_s \frac{e^{ikr}}{r} ds$$

Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral: Summation (Integration) über Kugelwellen, die von jedem Punkt des Spaltes ausgehen – Huygensches Prinzip.