Kapitel 7: Hamilton-Jacobi-Theorie

Wir stellen nun ein Standardverfahren vor, wie man systematisch eine kanonische Transformation finden kann, die eine vorgegebene Hamilton-Funktion und damit die zugrunde liegenden Hamilton-Gleichungen vereinfacht. Dies führt auf eine partielle Differentialgleichung für die Erzeugende der gesuchten kanonischen Transformation. Diese Hamilton-Jacobi-Gleichung läßt sich häufig mit der Methode der Separation der Variablen lösen.

7.1 Zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung:

Gegeben sei eine Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$, so daß die Hamilton-Gleichungen (6.6) zu lösen sind. Wir wollen nun eine kanonische Transformation dahingehend auswählen, daß die neuen Hamilton-Gleichungen (6.7) vereinfacht sind. Die denkbar einfachste Hamilton-Funktion $H'(Q,P,t)$ ist trivial

$$H'(Q,P,t)=0 \tag{7.1}$$

und führt auf die Hamilton-Gleichungen

$$\dot{Q}_i(t) \overset{(6.7),(7.1)}{=} 0, \qquad \dot{P}_i(t) \overset{(6.7),(7.1)}{=} 0 \; ; i=1,\dots,f \tag{7.2}$$

die sich unmittelbar integrieren lassen:

$$Q_i(t)=Q_i=\text{konst.}, \quad P_i(t)=P_i=\text{konst.} \; ; i=1,\dots,f \tag{7.3}$$

Wir suchen nun die Erzeugende $F_2(q,P,t)$ derjenigen kanonischen Transformation, die die vorgegebene Hamilton-Funktion $H(q,p,t)$ auf die triviale Hamilton-Funktion (7.1) abbildet. Aus (6.38) und (7.1) folgt zunächst die Bedingung

$$H(q,p,t)+\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}=0 \tag{7.4}$$

Mit Hilfe der Transformationsgleichungen (6.36) geht dann (7.4) in die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung über

$$H\left(q_1,\dots,q_f,\frac{\partial F_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f,t)}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial F_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f,t)}{\partial q_f},t\right)$$
$$+\frac{\partial F_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f,t)}{\partial t}=0 \tag{7.5}$$

Es handelt sich hierbei um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die Erzeugende $F_2(q,P,t)$, wobei die alten Koordinaten $q_1,\dots,q_f$ und die Zeit t als Variablen auftreten. Die vollständige Lösung von (7.5) beinhaltet deshalb $f+1$ Integrationskonstanten. Davon ist eine Integrationskonstante trivial, da die Erzeugende $F_2(q,P,t)$ selbst nicht explizit in (7.5) enthalten ist. Mit $F_2(q,P,t)$ ist offensichtlich auch $F_2'(q,P,t)=F_2(q,P,t)+g(P)$ eine Lösung von (7.5). Die restlichen f nichttrivialen Integrationskonstanten können wegen (7.3) mit den neuen generalisierten Impulsen $P_1,\dots,P_f$ identifiziert werden.

Wir denken uns nun die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.5) gelöst und wollen mit der bekannten Erzeugenden $F_2(q,P,t)$ die Lösung der ursprünglichen Hamilton-Gleichungen (6.6)

$$q_i=q_i(q_1^0,\dots,q_f^0,p_1^0,\dots,p_f^0,t)\;;\; i=1,\dots,f \tag{7.6}$$
$$p_i=p_i(q_1^0,\dots,q_f^0,p_1^0,\dots,p_f^0,t)\;;\; i=1,\dots,f$$

berechnen. Hierbei bezeichnen q_i^0 und p_i^0 mit $i=1,\dots,f$ die Anfangsdaten der generalisierten Koordinaten q_i und Impulse p_i mit $i=1,\dots,f$ zur Zeit $t=0$. Zunächst werten wir die Transformationsgleichungen (6.36) und (6.37) zur Zeit $t=0$ aus:

$$p_i^0=\frac{\partial F_2(q_1^0,\dots,q_f^0,P_1,\dots,P_f,0)}{\partial q_i^0}\;;\; i=1,\dots,f \tag{7.7}$$

$$Q_i=\frac{\partial F_2(q_1^0,\dots,q_f^0,P_1,\dots,P_f,0)}{\partial P_i}\;;\; i=1,\dots,f \tag{7.8}$$

Es handelt sich um $2f$ algebraische Gleichungen, aus denen sich die nach (7.3) vorliegenden Integrationskonstanten Q_i und P_i als Funktion der Anfangsdaten q_i^0 und p_i^0 ausdrücken lassen:

$$Q_i=Q_i(q_1^0,\dots,q_f^0,p_1^0,\dots,p_f^0) \tag{7.9}$$
$$P_i=P_i(q_1^0,\dots,q_f^0,p_1^0,\dots,p_f^0)$$

Für beliebige Zeiten t lauten die Transformationsgleichungen (6.36) und (6.37)

$$p_i=\frac{\partial F_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f,t)}{\partial q_i}\;;\; i=1,\dots,f \tag{7.10}$$

$$Q_i=\frac{\partial F_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f,t)}{\partial P_i}\;;\; i=1,\dots,f \tag{7.11}$$

Zunächst kann (7.11) nach den alten generalisierten Koordinaten aufgelöst werden:

$$q_i=q_i(Q_1,\dots,Q_f,P_1,\dots,P_f,t)\;;\; i=1,\dots,f \tag{7.12}$$

Setzt man (7.12) in (7.10) ein, so ergeben sich schließlich auch die alten generalisierten Impulse

$$p_i=p_i(Q_1,\dots,Q_f,P_1,\dots,P_f,t)\;;\; i=1,\dots,f \tag{7.13}$$

Aus (7.9), (7.12) und (7.13) folgt schließlich die gesuchte Lösung (7.6) der Hamilton-Gleichungen (6.6).

Die Erzeugende $F_2(q,P,t)$ als Lösung der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.5) lässt sich auch physikalisch interpretieren. Hierzu betrachten wir die totale Zeitableitung, die mit der Lagrange-Funktion identifiziert werden kann:

$$\frac{dF_2(q,P,t)}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial P_i}\dot{P}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$
$$\underset{(6.36),(7.2),(7.4)}{=} \sum_i p_i \dot{q}_i - H \underset{(5.24)}{=} L \tag{7.14}$$

Die Integration von (7.14) zeigt, daß die Erzeugende $F_2(q,P,t)$ bis auf eine Integrationskonstante die Wirkung entlang der Bahnkurve darstellt. Deshalb wird sie häufig auch als Hamiltonsche Wirkungsfunktion bezeichnet.

7.2 Zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung:

Wir betrachten nun eine Hamilton-Funktion $H(q,p)$, die nicht explizit von der Zeit abhängt. Zur Lösung der zeitabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.5) machen wir den Ansatz

$$F_2(q,P,t) = \tilde{F}_2(q,P) - \tilde{H}(P)\, t \tag{7.15}$$

der die Abhängigkeiten von den alten generalisierten Koordinaten q_i mit $i=1,\dots,f$ und der Zeit t separiert und die Separationskonstante $\tilde{H}(P)$ enthält. Einsetzen von (7.15) in (7.5) führt auf die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$H\left(q_1,\dots,q_f, \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f)}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f)}{\partial q_f}\right) = \tilde{H}(P_1,\dots,P_f) \tag{7.16}$$

und die Transformationsgleichungen (7.10), (7.11) lauten

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f)}{\partial q_i} \quad ; i=1,\dots,f \tag{7.17}$$

$$Q_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f)}{\partial P_i} \quad ; i=1,\dots,f \tag{7.18}$$

Da die Hamilton-Funktion $H(q,p)$ nicht explizit von der Zeit t abhängt, kann man die Separationskonstante $\tilde{H}(P)$ in (7.16) mit der Energie des Systems identifizieren.

Bisher wurde die Hamiltonsche charakteristische Funktion $\tilde{F}_2(q,P)$ lediglich als Bestandteil der Hamiltonschen Wirkungsfunktion $F_2(q,P,t)$ betrachtet. Wir können aber $\tilde{F}_2(q,P)$ auch als die Erzeugende einer eigenen kanonischen Transformation auffassen, deren Eigenschaften von der durch $F_2(q,P,t)$ erzeugten kanonischen Transformation etwas verschieden sind. Aus (6.38) und (7.16) folgt, daß die neue Hamilton-Funktion gegeben ist durch

$$\tilde{H}'(\tilde{Q},P) = \tilde{H}(P), \tag{7.19}$$

so daß die neuen generalisierten Koordinaten $\tilde{Q}_i$ mit $i=1,\dots,f$ zyklisch sind. Die neuen Hamilton-Gleichungen

$$\dot{\tilde{Q}}_i \overset{(6.71),(7.19)}{=\!=\!=} \frac{\partial \tilde{H}(P_1,\dots,P_f)}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i \overset{(6.71),(7.19)}{=\!=\!=} 0\,;\; i=1,\dots,f \tag{7.20}$$

lassen sich unmittelbar integrieren

$$\tilde{Q}_i(t) = \frac{\partial \tilde{H}(P_1,\dots,P_f)}{\partial P_i}\, t + Q_i\,, \quad P_i(t) = P_i\,;\; i=1,\dots,f \tag{7.21}$$

Damit sind die zu den zyklischen generalisierten Koordinaten $\tilde{Q}_i$ kanonisch konjugierten Impulse tatsächlich Erhaltungsgrößen. Die Transformationsgleichungen (6.36), (6.37) von $\tilde{F}_2(q,P)$ lauten

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f)}{\partial q_i}\,;\; i=1,\dots,f \tag{7.22}$$

$$\tilde{Q}_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f)}{\partial P_i}\,;\; i=1,\dots,f \tag{7.23}$$

sie sind wegen (7.21) offenbar mit denen von $F_2(q,P,t)$ in (7.17) und (7.18) identisch.

Die Hamiltonsche charakteristische Funktion $\tilde{F}_2(q,P)$ besitzt eine physikalische Bedeutung, die der der Hamiltonschen Wirkungsfunktion $F_2(q,P,t)$ sehr ähnlich ist. Für die totale Zeitableitung erhalten wir

$$\frac{d\tilde{F}_2(q,P)}{dt} = \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_i}\dot{P}_i\right) \overset{(7.20),(7.22)}{=\!=\!=} \sum_{i=1}^{f} p_i\,\dot{q}_i \tag{7.24}$$

so daß die Zeitintegration ergibt

$$\tilde{F}_2(q,P) = \sum_{i=1}^{f} \int p_i\, dq_i \tag{7.25}$$

7.3 Harmonischer Oszillator:

Wir betrachten als Beispiel den harmonischen Oszillator, dessen Hamilton-Funktion schon in (5.72) aufgestellt wurde. Die zeitabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.5) für die Hamiltonsche Wirkungsfunktion $F_2(q,P,t)$ lautet in diesem Fall

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 + \frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t} = 0 \tag{7.26}$$

Da die Hamilton-Funktion (5.72) des harmonischen Oszillators nicht explizit zeitabhängig ist, läßt sich die Hamiltonsche Wirkungsfunktion gemäß (7.15) separieren:

$$F_2(q,P,t) = \tilde{F}_2(q,P) - \tilde{H}(P)\,t \tag{7.27}$$

wobei die Separationskonstante $\tilde{H}(P)$ als Energie des System mit dem neuen Impuls als Erhaltungsgröße identifiziert werden kann. In Analogie zu (6.25) setzen wir

$$\tilde{H}(P) = \omega P \tag{7.28}$$

Durch (7.27) und (7.28) geht (7.26) in die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung über:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde{F}_2(q,P)}{\partial q}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 = \omega P \tag{7.29}$$

Eine algebraische Umformung von (7.29) ergibt

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(q,P)}{\partial q} = \sqrt{2m\left(\omega P - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right)} \tag{7.30}$$

sodaß sich durch Integration die Hamiltonsche charakteristische Funktion ergibt:

$$\tilde{F}_2(q,P) = \int^q \sqrt{2m\omega P - m^2\omega^2 q'^2}\, dq' \tag{7.31}$$

Hierbei wurde eine nur von P abhängige Integrationskonstante weggelassen. Das Standardintegral

$$\int^x \sqrt{a^2 - z^2}\, dz \underset{\text{Bronstein}}{=} \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \tag{7.32}$$

führt dann (7.31) über in

$$\tilde{F}_2(q,P) = \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\, q\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2} + P\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\, q \tag{7.33}$$

Mit dieser Hamiltonschen charakteristischen Funktion läßt sich der Zusammenhang zwischen den alten und neuen Lagen berechnen. Hierzu betrachten wir deren partielle Ableitung nach q

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(q,P)}{\partial q} = \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\left\{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2} + \frac{q}{2}\frac{-\frac{m\omega}{2P}2q}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2}}\right\} + P\frac{\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2}}\left\{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2 - \frac{m\omega}{2P}q^2 + 1\right\} = \sqrt{2m\omega P}\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2} \stackrel{\wedge}{=} (7.30)$$

und nach P

$$\frac{\partial \tilde{F}_2(q,P)}{\partial P} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\frac{1}{2\sqrt{P}}\, q\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2} + \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\frac{q}{2}\frac{\frac{m\omega}{2P^2}q^2}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2}} + \arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\, q$$

$$+ P\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2}}\sqrt{\frac{m\omega}{2}}\frac{-q}{2}\frac{1}{P^{3/2}} = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2}}\left\{1 - \frac{m\omega}{2P}q^2 + \frac{m\omega}{2P}q^2 - 1\right\}$$

$$+ \arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\, q = \arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\, q \tag{7.34}$$

Aus der Transformationsgleichung (7.18) folgt dann mit (7.28) und (7.34)

$$Q = \arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\, q - \omega t \implies q(t) = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin(Q + \omega t) \tag{7.35}$$

Außerdem ergibt sich aus (7.17), (7.30) und (7.35)

$$p(t)=\sqrt{2m\omega P}\,\cos(Q+\omega t) \tag{7.36}$$

Unter Berücksichtigung von (7.28) stimmen (7.35), (7.36) mit (6.30) überein.

Abschließend führen wir mit der Hamiltonschen charakteristischen Funktion $\tilde F_2(q,P)$ in (7.33) eine Legendre-Transformation bezüglich des neuen Impulses P durch, um die entsprechende Erzeugende $\tilde F_1(q,\tilde Q)$ zu bestimmen. Aus der Transformationsgleichung (7.23) ergibt sich mit (7.34)

$$\tilde Q=\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\,q \iff P=\frac{m\omega}{2}q^2\frac{1}{\sin^2\tilde Q} \tag{7.37}$$

Die Legendre-Transformierte $\tilde F_1(q,\tilde Q)$ zu $\tilde F_2(q,P)$ ergibt sich dann gemäß (6.31) zu

$$\tilde F_1(q,\tilde Q)=\tilde F_2(q,P)-\tilde Q P \overset{(7.33)}{=} \sqrt{\frac{m\omega P}{2}}\,q\sqrt{1-\frac{m\omega}{2P}q^2}+P\arcsin\sqrt{\frac{m\omega}{2P}}\,q$$

$$-\tilde Q P \overset{(7.37)}{=} \sqrt{\frac{m\omega q^2}{2}\,\frac{m\omega q^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{\sin^2\tilde Q}}\sqrt{1-\frac{m\omega q^2\sin^2\tilde Q}{2\frac{m\omega}{2}q^2}}+\frac{m\omega}{2}\,\frac{q^2}{\sin^2\tilde Q}$$

$$\cdot\left\{\arcsin\sqrt{\frac{m\omega q^2}{2\frac{m\omega}{2}q^2}\sin^2\tilde Q}-\tilde Q\right\}\Rightarrow \tilde F_1(q,\tilde Q)=\frac{m\omega}{2}q^2\operatorname{ctg}\tilde Q \tag{7.38}$$

Als Ergebnis haben wir damit die in (6.22) verwendete Erzeugende erhalten.

7.4 Ebene Bewegung im Zentralfeld:

Das Verfahren von Hamilton-Jacobi zur Lösung mechanischer Probleme scheint auf den ersten Blick nur von geringer praktischer Bedeutung zu sein. Anstatt die 2f gewöhnlichen Hamilton-Gleichungen muß man die partielle Hamilton-Jacobi-Gleichung lösen und partielle Differentialgleichungen sind bekanntlich schwerer als gewöhnliche Differentialgleichungen zu lösen. Unter gewissen Bedingungen ist es jedoch möglich, die einzelnen Variablen in der Hamilton-Jacobi-Gleichung zu separieren, so daß die Lösung stets auf Quadraturen zurückgeführt werden kann. Praktisch ist das Hamilton-Jacobi-Verfahren nur dann eine nützliche Rechenhilfe, wenn sich eine solche Separation durchführen läßt.

Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einer Ebene in einem Zentralfeld. In ebenen Polarkoordinaten wurde dessen kinetische Energie schon in (1.51) angegeben, so daß die Lagrange-Funktion lautet

$$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi)=\frac{m}{2}\left(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2\right)-V(r) \tag{7.39}$$

die zu den generalisierten Koordinaten r und φ kanonisch konjugierten Impulse lauten

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} \overset{(7.39)}{=} m\dot r \Longrightarrow \dot r = \frac{1}{m}\, p_r \tag{7.40}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \overset{(7.39)}{=} m r^2 \dot\varphi \Longrightarrow \dot\varphi = \frac{1}{m r^2}\, p_\varphi \tag{7.41}$$

durch eine Legendre-Transformation (5.24) geht die Lagrange- in die Hamilton-Funktion über:

$$\begin{aligned} H(r,\varphi,p_r,p_\varphi) &= p_r \dot r + p_\varphi \dot\varphi - L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) \\ &\overset{(7.39)-(7.41)}{=} p_r \frac{p_r}{m} + p_\varphi \frac{p_\varphi}{m r^2} - \left[\frac{m}{2}\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{m}{2} r^2 \frac{p_\varphi^2}{m^2 r^4} - V(r)\right] \\ &= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2 m r^2} + V(r) \end{aligned} \tag{7.42}$$

Da keine explizite Zeitabhängigkeit in (7.42) vorliegt, ist die zeitunabhängige Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.16) für die Hamiltonsche charakteristische Funktion zu lösen:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde F_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial \tilde F_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 + V(r) = \tilde H(P_r,P_\varphi) \tag{7.43}$$

Eine einfache algebraische Umformung ergibt:

$$\left(\frac{\partial \tilde F_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial \varphi}\right)^2 = 2mr^2\left\{\tilde H(P_r,P_\varphi) - V(r) - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \tilde F_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial r}\right)^2\right\} \tag{7.44}$$

Die linke Seite von (7.44) hängt nur von φ ab, während die rechte Seite nur von r abhängt. Deshalb müssen beide Seiten gleich einer Separationskonstanten $c^2(P_r,P_\varphi)$ sein. Aus der linken Seite von (7.44) folgt dann die Gleichung

$$\frac{\partial \tilde F_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi)}{\partial \varphi} = c(P_r,P_\varphi) \tag{7.45}$$

was zum folgenden Separationsansatz der Variablen führt:

$$\tilde F_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi) = \varphi\, c(P_r,P_\varphi) + \tilde F_2(r,P_r,P_\varphi) \tag{7.46}$$

Einsetzen von (7.46) in (7.44) führt dann auf

$$\frac{\partial \tilde F_2(r,P_r,P_\varphi)}{\partial r} = \sqrt{2m\left\{\tilde H(P_r,P_\varphi) - V(r) - \frac{c(P_r,P_\varphi)^2}{2mr^2}\right\}} \tag{7.47}$$

was unmittelbar integriert werden kann:

$$\tilde F_2(r,P_r,P_\varphi) = \int^r \sqrt{2m\left\{\tilde H(P_r,P_\varphi) - V(r') - \frac{c(P_r,P_\varphi)^2}{2mr'^2}\right\}}\, dr' \tag{7.48}$$

Der Einfachheit halber werden die beiden Konstanten $\tilde H(P_r,P_\varphi)$, $c(P_r,P_\varphi)$ mit den neuen Impulsen identifiziert:

$$\tilde H(P_r,P_\varphi) = P_r, \quad c(P_r,P_\varphi) = P_\varphi \tag{7.49}$$

Die Hamiltonsche charakteristische Funktion ergibt sich dann aus (7.46), (7.48), (7.49) zu

$$\tilde F_2(r,\varphi,P_r,P_\varphi) = \varphi P_\varphi + \int^r \sqrt{2m\left\{P_r - V(r') - \frac{P_\varphi^2}{2mr'^2}\right\}}\, dr' \tag{7.50}$$

Die Transformationsgleichungen (7.18) lauten dann

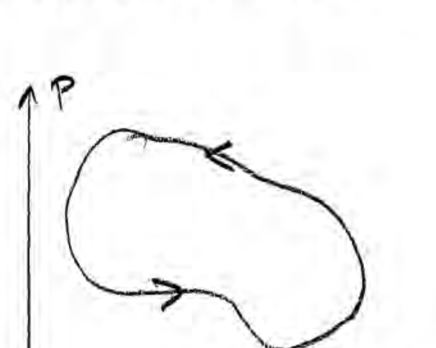
$$Q_r \overset{(7.18)}{=} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_r} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_r}\, t \overset{(7.49),(7.50)}{=} \int^r \frac{m}{\sqrt{2m\left\{P_r - V(r') - \frac{P_\varphi^2}{2mr'^2}\right\}}}\, dr' - t \quad (7.51)$$

$$Q_\varphi \overset{(7.18)}{=} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial P_\varphi} - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\varphi}\, t \overset{(7.49),(7.50)}{=} \varphi - \int^r \frac{P_\varphi^2/r'^2}{\sqrt{2m\left\{P_r - V(r') - \frac{P_\varphi^2}{2mr'^2}\right\}}}\, dr' \quad (7.52)$$

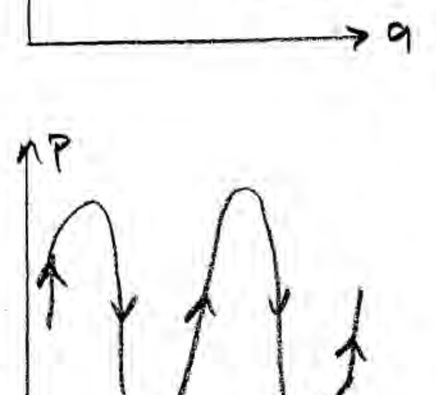
Hierbei stellt (7.51) eine implizite Gleichung für $r(t)$ dar, die in (7.52) eingesetzt $\varphi(t)$ ergibt. Ist man dagegen an der Bahnkurve $r(\varphi)$ interessiert, so lässt sich diese direkt aus (7.52) berechnen.

7.5 Wirkungs- und Winkelvariablen:

Wir diskutieren nun eine wichtige Modifikation des Hamilton-Jacobi-Verfahrens, das auf periodische Systeme zugeschnitten ist, bei denen man sich häufig mehr für die Frequenzen der Bewegung als z.B. für die konkrete Gestalt der Bahn interessiert. Hierzu betrachten wir zunächst ein einzelnes Paar von kanonisch konjugierten Variablen q und P, d.h. die Projektion des Phasenraumes auf eine einzelne P-q-Ebene. Man unterscheidet zwei Typen von Periodizitäten:



1. Bei einer Libration ist die Phasenbahn in der P-q-Ebene eine geschlossene Kurve, so daß q und P periodisch mit der gleichen Periodendauer T sind:
$$q(t) = q(t+T), \quad P(t) = P(t+T) \quad (7.53)$$
Die Libration ist typisch für schwingende Systeme, wie z.B. eine Feder.



2. Bei einer Rotation ist zwar auch P periodisch
$$P(t) = P(t+T) \quad (7.54)$$
q dagegen nicht mehr. Die generalisierte Koordinate ändert sich vielmehr nach der Periode T um einen konstanten Wert q_0
$$q(t+T) = q(t) + q_0 \quad (7.55)$$
Die Phasenbahn ist offen, wobei P jedoch eine periodische Funktion von q ist. Die Rotation tritt beispielsweise bei der Achsendrehung eines starren Körpers auf.

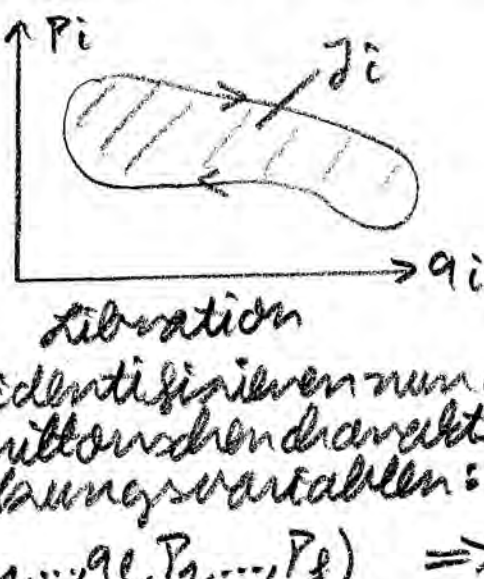
Diese beiden Bewegungstypen lassen sich unter Umständen auch an ein- und demselben System beobachten. Bei der Dio-

…kussion des Pendels im Phasenraum in Abschnitt 5.9 haben wir gesehen, daß für kleine Energien eine Libration auftritt, für große Energien aber eine Rotation vorliegt. Dabei werden Libration und Rotation durch eine Separatrix getrennt.

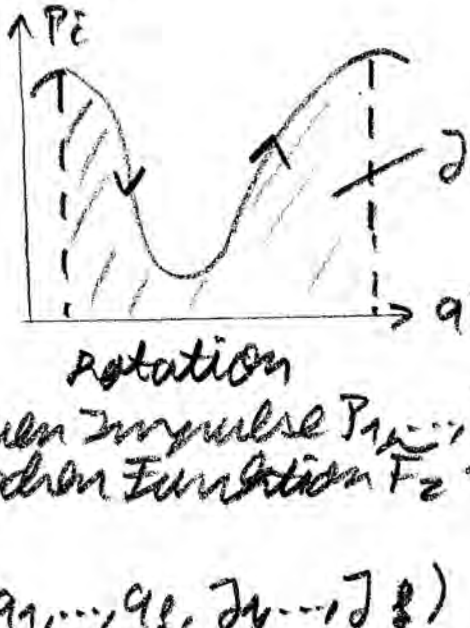
Wir behandeln nun periodische Systeme im Rahmen der Hamilton-Jacobi-Theorie und betrachten die Hamiltonsche charakteristische Funktion $\tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f)$ als bekannt. Die bei der Lösung der zeitunabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.16) auftretenden Integrationskonstanten wurden bisher immer unmittelbar mit den neuen Impulsen $P_1,\dots,P_f$ identifiziert. Diese Wahl ist aber nicht eindeutig, da wir auch irgendwelche Funktionen der Integrationskonstanten mit den neuen Impulsen identifizieren können. Für periodische Systeme ist es aber gebräuchlich und naheliegend, die sogenannten Wirkungsvariablen

$$J_i = \oint p_i \, dq_i \quad i=1,\dots,f \tag{7.56}$$

als neue Impulse anzusehen. Dabei erfolgt die Integration über eine volle Periode der Libration bzw. Rotation, sodaß wir die Wirkungsvariablen mit folgenden Flächeninhalten identifizieren können:



Libration



Rotation

Wir identifizieren nun die neuen Impulse $P_1,\dots,P_f$ in der Hamiltonschen charakteristischen Funktion $\tilde{F}_2$ mit den Wirkungsvariablen:

$$\tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,P_1,\dots,P_f) \Rightarrow \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,J_1,\dots,J_f) \tag{7.57}$$

Nach der zeitunabhängigen Hamilton-Jacobi-Gleichung (7.16) ist dann auch die neue Hamilton-Funktion $\tilde{H}$ ausschließlich eine Funktion der Wirkungsvariablen:

$$\tilde{H}(P_1,\dots,P_f) \Rightarrow \tilde{H}(J_1,\dots,J_f) \tag{7.58}$$

Wir kommen nun zu den Winkelvariablen $w_1,\dots,w_f$, die man als die zu den Wirkungsvariablen $J_1,\dots,J_f$ kanonisch konjugierten Variablen einführt:

$$P_i = J_i \iff \tilde{Q}_i = w_i \; ; \; i=1,\dots,f \tag{7.59}$$

Wie aus der neuen Hamilton-Funktion (7.58) hervorgeht, sind die Winkelvariablen $w_1,\dots,w_f$ alle zyklisch. Die Lösung der neuen Hamilton-Gleichungen

$$\dot{w}_i(t) \overset{(7.20)}{=} \frac{\partial \tilde{H}(J_1(t),\dots,J_f(t))}{\partial J_i(t)} \, , \quad \dot{J}_i(t) \overset{(7.20)}{=} 0 \; ; \; i=1,\dots,f \tag{7.60}$$

ist dann trivial gegeben durch

$$w_i(t) \overset{(7.60)}{=} \nu_i t + Q_i \, , \quad J_i(t) \overset{(7.60)}{=} J_i \; ; \; i=1,\dots,f \tag{7.61}$$

wobei die Frequenzen

$$\nu_i = \frac{\partial \tilde{H}(J_1,\dots,J_f)}{\partial J_i} \; ; \; i=1,\dots,f \tag{7.62}$$

auftreten. Außerdem lauten die Transformationsgleichungen (7.22), (7.23) der Hamiltonschen charakteristischen Funktion (7.57)

$$p_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,J_1,\dots,J_f)}{\partial q_i} \; ; \; i=1,\dots,f \tag{7.63}$$

$$w_i = \frac{\partial \tilde{F}_2(q_1,\dots,q_f,J_1,\dots,J_f)}{\partial J_i} \; ; \; i=1,\dots,f \tag{7.64}$$

Damit haben wir das im Abschnitt 7.2 geschilderte Hamilton-Jacobi-Verfahren lediglich auf Wirkungs- und Winkelvariablen umgeschrieben, aber noch keinen besonderen Vorteil erarbeitet. Deshalb untersuchen wir nun die physikalische Bedeutung der Wirkungs- und Winkelvariablen, indem wir die Änderung der Winkelvariable w_i bei einer Änderung der generalisierten Koordinate q_j über eine volle Periode berechnen:

$$\delta_j w_i = \oint_j dw_i = \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j \overset{(7.64)}{=} \oint \frac{\partial^2 \tilde{F}_2}{\partial q_j \partial J_i} dq_j$$

$$\overset{\text{Schwarz}}{=} \oint \frac{\partial^2 \tilde{F}_2}{\partial J_i \partial q_j} dq_j = \frac{\partial}{\partial J_i} \oint \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial q_j} dq_j \overset{(7.63)}{=} \frac{\partial}{\partial J_i} \oint p_j \, dq_j$$

$$\overset{(7.56)}{=} \frac{\partial J_i}{\partial J_j} = \delta_{ij} \tag{7.65}$$

Dies bedeutet, daß sich die Winkelvariable w_i nur dann ändert, wenn sich $q_j = q_i$ über eine Periode ändert. Bezeichnet T_i die Periodendauer von q_i, so gilt in diesem Fall

$$w_i(t+T_i) \overset{(7.65)}{=} w_i(t) + 1 \tag{7.66}$$

Mit Hilfe von (7.61) besagt dies

$$\nu_i(t+T_i)+Q_i = \nu_i + Q_i + 1 \Rightarrow \nu_i = \frac{1}{T_i} \qquad (7.67)$$

Demnach ist die durch (7.62) definierte Größe ν_i gerade die Frequenz der zu q_i gehörenden periodischen Bewegung. Hierin liegt die eigentliche Bedeutung der Wirkungs- und Winkelvariablen, da sie durch (7.62) eine Bestimmung der Frequenzen periodischer Bewegungen gestattet, ohne die vollständige Lösung für die Systembewegung gewonnen zu haben.

Wir demonstrieren das Vorgehen am Beispiel des harmonischen Oszillators. Wie schon in Abschnitt 5.9 erläutert, ist die Trajektorie im Phasenraum eine Ellipse mit den Halbachsen (5.74). Der Flächeninhalt dieser Ellipse ist dann gerade die Wirkungsvariable

$$J \overset{(7.56)}{=} \oint p\,dq = \pi a_p a_q \overset{(5.74)}{=} \pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\sqrt{2mE} = \frac{2\pi}{\omega}E \qquad (7.68)$$

Die neue Hamilton-Funktion des harmonischen Oszillators, die mit der Energie E identifiziert werden kann, hat dann gemäß (7.68) die einfache Gestalt

$$\tilde{H}(J) = \frac{\omega}{2\pi} J \qquad (7.69)$$

Für die Frequenz ν der periodischen Bewegung erhalten wir das erwartete Ergebnis

$$\nu \overset{(7.62)}{=} \frac{\partial \tilde{H}(J)}{\partial J} \overset{(7.69)}{=} \frac{\omega}{2\pi} \qquad (7.70)$$

Das Beispiel des harmonischen Oszillators diente lediglich dazu, die Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen zu illustrieren. Der Nutzen dieser Methode zeigt sich erst bei anspruchsvolleren Problemen wie z.B. der Himmelsmechanik. Eine Behandlung des Kepler-Problems mit der Methode der Wirkungs- und Winkelvariablen findet sich in der Literatur.