

# Bose-Einstein-Kondensation

von Markus Pater

14. März 2007



Vortrag im Hauptseminar der Theoretischen Physik im Wintersemester 2006/2007

am 17. Januar 2007

Arbeitsgruppe Prof. Dr. R. Graham



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1 Geschichte der Bose-Einstein-Kondensation . . . . .	3
1.2 Bosonen und Fermionen . . . . .	3
1.3 Phänomenologischer Zugang zur kritischen Temperatur . . . . .	7
1.4 Laserkühlung . . . . .	8
1.5 Evaporative Kühlung . . . . .	9
<b>2 Thermodynamik</b>	<b>10</b>
2.1 Großkanonische Gesamtheit . . . . .	10
2.2 Besetzungszahldarstellung . . . . .	11
2.3 Semiklassische Näherung . . . . .	14
2.4 Ideales Bose-Gas in harmonischer Falle . . . . .	14
2.5 Korrekturen . . . . .	16
<b>3 Dynamik</b>	<b>19</b>
3.1 Gross-Pitaevskii-Gleichung . . . . .	19
3.2 Thomas-Fermi-Näherung . . . . .	21
3.3 Hydrodynamische Gleichungen . . . . .	23
3.4 Linearisierte hydrodynamische Gleichungen in Thomas-Fermi-Näherung . . . . .	24
3.5 Elementare Anregungen . . . . .	25
<b>4 Ausblick</b>	<b>27</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Geschichte der Bose-Einstein-Kondensation

Das erste Experiment, welches in einem Zusammenhang zur Bose-Einstein-Kondensation steht, wurde schon 1911 vom Niederländer Kamerlingh Onnes durchgeführt, auch wenn damals das Phänomen der Bose-Einstein-Kondensation noch gar nicht bekannt war. Kamerlingh Onnes entdeckte die Supraleitung von Quecksilber unterhalb von 4,2 K, wofür er schon 1913 den Nobelpreis erhielt. Das Phänomen der Supraleitung entsteht dadurch, dass zwei Fermionen durch Phononen vermittelt ein bosonisches Cooper-Paar bilden. Die Cooper-Paare kondensieren bei kleinen Temperaturen im Grundzustand an der Fermi-Kante und das System leitet in diesem Zustand elektrischen Strom widerstandsfrei. Die Theorie zur Supraleitung, die so genannte BCS-Theorie, wurde von den Physikern Bardeen, Cooper und Schrieffer in den fünfziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts entwickelt, wofür sie 1972 den Nobelpreis erhielten.

1924 wurde die Bose-Einstein-Kondensation zum ersten Mal theoretisch behandelt. Bose leitete in einer Arbeit die Plancksche Strahlungsformel her, in dem er die Photonen als Gas ununterscheidbarer masseloser Teilchen beschrieb. Einstein griff diese Idee im gleichen und darauf folgenden Jahr auf und erweiterte die Theorie auf ununterscheidbare massive Teilchen. Damit wurde die Theorie der Bose-Einstein-Kondensation für wechselwirkungsfreie Teilchen begründet.

1937 wurde ein zweites Experiment durchgeführt, das indirekt mit der Bose-Einstein-Kondensation zusammenhängt. Kapiza entdeckte, dass  $^4\text{He}$  bei geringen Temperaturen suprafluid wird, wofür er 1978 den Nobelpreis erhielt. Ähnlich wie ein Supraleiter elektrischen Strom widerstandsfrei leitet, so bezeichnet die Suprafluidität das Phänomen, dass eine Flüssigkeit reibungsfrei fließen kann.  $^4\text{He}$  besteht aus Bosonen, weshalb die makroskopische Besetzung des Grundzustands möglich ist. Ist dies der Fall, so ist das Helium suprafluid. Die Theorie zur Suprafluidität wurde in den 1940er Jahren von Landau entwickelt, wofür er 1962 den Nobelpreis erhielt.

In den achtziger Jahren wurde die Grundlage zur experimentellen Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation gelegt. Diese ist nämlich erst bei sehr geringen Temperaturen im nK-Bereich möglich. Erst durch die Entwicklung der Laserkühlung von Chu, Cohen-Tannoudji und Phillips gab es die Möglichkeit, solche geringen Temperaturen zu erreichen, wofür sie 1997 mit dem Nobelpreis geehrt wurden.

Erst 1995 wurde die Bose-Einstein-Kondensation direkt im Experiment realisiert. Fast zeitgleich führten Gruppen am MIT um den Deutschen Ketterle mit Natrium und am JILA um die Amerikaner Wieman und Cornell mit Rubidium diese Experimente durch, wofür 2001 der Nobelpreis verliehen wurde [1]. In Abbildung 1 sind Aufnahmen zu den Experimenten am JILA dargestellt. Sie zeigen die Geschwindigkeitsverteilung von 20000  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen, die in einer anisotropen harmonischen Falle gefangen wurden.

Abbildung 2 zeigt ein Periodensystem, in dem die Elemente farbig markiert sind, mit denen man bis heute Bose-Einstein-Kondensate herstellen konnte.

## 1.2 Bosonen und Fermionen

Zwei Teilchen heißen identisch, wenn all ihre inneren Eigenschaften (Masse, Spin, Ladung, ...) exakt übereinstimmen. In der Quantenmechanik gibt es kein Experiment, in dem man zwei identische Teilchen voneinander unterscheiden könnte. Wenn ein physikalisches System zwei identische Teilchen enthält,

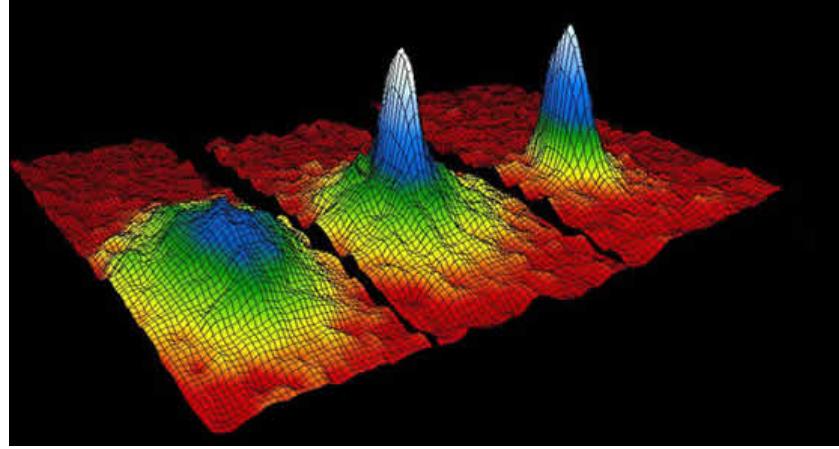


Abbildung 1: Geschwindigkeitsverteilung gekühlter  $^{87}\text{Rb}$ -Atome. Parameter des Experiments:  $N = 20000$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3/\sqrt{8} = 2\pi \cdot 120\text{Hz}$ .

so werden also seine Eigenschaften und seine Zeitentwicklung nicht beeinflusst, wenn die Teilchen vertauscht werden.

Anders als in der klassischen Mechanik stellt es in der Quantenmechanik ein Problem dar, Systeme von identischen Teilchen zu behandeln. Durch Vertauschung der Teilchennummerierung gelangt man zu mathematisch verschiedenen Möglichkeiten, ein System zu beschreiben. Natürlich darf die Nummerierung, die ja nur ein Hilfsmittel der Theorie ist, keinen Einfluss auf physikalische Vorhersagen haben. In der Quantenmechanik verändern sich aber die Vorhersagen, sofern man sich auf eine der möglichen mathematischen Beschreibungen festlegt. Der anschauliche Grund hierfür liegt darin, dass man den Teilchen keine eindeutige Trajektorie zuordnen kann. Selbst wenn zur Zeit  $t_0$  die Wellenfunktionen von zwei Teilchen räumlich voneinander getrennt sind, können sie im Laufe der Zeit überlappen und man verliert ihre "Spur". Weist man ein Teilchen durch eine Messung in einem Raumgebiet nach, so kann man nicht entscheiden, um welches der beiden Teilchen es sich hierbei handelt.

Dieses Problem wird durch das so genannte Symmetrisierungspostulat gelöst. Dieses besagt, dass der Zustandsvektor  $|u\rangle$  eines Systems aus  $N$  identischen Teilchen entweder total symmetrisch

$$P_\alpha |u\rangle = |u\rangle \quad (1.2.1a)$$

oder total antisymmetrisch

$$P_\alpha |u\rangle = \varepsilon_\alpha |u\rangle \quad (1.2.1b)$$

bezüglich der Teilchenvertauschung sein muss.

Hierbei bezeichnet  $\varepsilon_\alpha$  die Parität der Permutation  $P_\alpha$  und der Zustand  $|u\rangle$  ist aus dem Tensorproduktraum der Einteilchen-Hilberträume  $H_i$ , also eine Superposition der Basisvektoren

$$|\varphi_{\nu_1}\rangle \otimes |\varphi_{\nu_2}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{\nu_N}\rangle =: |1 : \varphi_{\nu_1}; 2 : \varphi_{\nu_2}; \dots; N : \varphi_{\nu_N}\rangle , \quad (1.2.2)$$

wobei  $|\varphi_\nu\rangle$  die Basisvektoren des Einteilchen-Hilbertraumes sind.

Periode		□ = Hauptgruppen				□ = Nebengruppen				□ = Edelgase				Schale					
I	II	IIIa	IVa	Va	VIA	VIIa	VIIa	Ia	Ib	III	IV	V	VI	VII	VIII				
1	H 1 Wasserstoff													He 2 Helium	K				
2	Li 3 Lithium	Be 4 Beryllium								B 5 Bor	C 6 Kohlenstoff	N 7 Stickstoff	O 8 Sauerstoff	F 9 Phosphor	Ne 10 Natrium	L			
3	Na 11 Natrium	Mg 12 Magnesium								Al 13 Aluminium	Si 14 Silizium	P 15 Phosphor	S 16 Sulf	Cl 17 Chlor	Ar 18 Argon	M			
4	K 19 Kalium	Ca 20 Calcium	Sc 21 Scandium	Ti 22 Titan	V 23 Vanadin	Cr 24 Chrom	Mn 25 Mangan	Fe 26 Eisen	Co 27 Kobalt	Ni 28 Nickel	Cu 29 Kupfer	Zn 30 Zink	Ga 31 Gallium	Ge 32 Germanium	As 33 Arsen	Se 34 Selen	Br 35 Brom	Kr 36 Krypton	N
5	Rb 37 Rubidium	Sr 38 Strontium	Y 39 Yttrium	Zr 40 Zirkonium	Nb 41 Niob	Hf 42 Molybdän	Ta 43 Technetium	W 44 Rhodium	Ru 45 Ruthenium	Pd 46 Rhodium	Ag 47 Palladium	Cd 48 Cadmium	In 49 Indium	Sn 50 Zinn	Sb 51 Antimon	Te 52 Tellur	I 53 Iod	Xe 54 Xenon	O
6	Cs 55 Cs	Fr 56 Barium	Ba 57 Lanthan	Hf 72 Hafnium	Ta 73 Tantal	W 74 Wolfson	Re 75 Rhenium	Os 76 Osmium	Ir 77 Iridium	Pt 78 Platin	Au 79 Gold	Ag 80 Quecksilber	Cd 81 Thallium	Bi 82 Bismut	Pb 83 Polonium	Bi 84 Astat	At 85 Radon	Rn 86 Radium	P
7	Fr 87 Francium	Ra 88 Radium	Ac 89 Actinium	Rf 104 Rutherfordium	Ha 105 Hahnium	Pa 106 Seaborgium	Ns 107 Nhlobium	Hs 108 Hassium	Mt 109 Meitnerium	Ds 110 Darmstadium	Rg 111 Roentgenium	? 112 ?	? 113 ?	ca. 289 114 ?	ca. 289 115 ?	ca. 289 116 ?	ca. 293 118 ?	Q	
Aggregatzustand unter Normalbedingungen: Fe fest Hg flüssig He gasförmig * = radioaktives Element																			
Lanthanide Ce Pr Nd Pm Sm Eu Gd Tb Dy Ho Er Tm Yb Lu * = radioaktives Element																			
Actinide Th Pa U Np Pu Am Cm Bk Cf Es Fm Md No Lr Thorium Protactinium Uranium Neptunium Plutonium Americium Curium Berkelium Californium Einstenium Fermium Mendelevium Nobelium Lawrencium																			

Abbildung 2: Periodensystem der kondensierten Elemente.

Man betrachte nun die Operatoren:

$$S := \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} P_{\alpha}, \quad (1.2.3a)$$

$$A := \frac{1}{N!} \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} P_{\alpha}. \quad (1.2.3b)$$

$S$  ist Projektor auf den Unterraum  $H_S$ , den Unterraum der total symmetrischen Vektoren von  $\bigotimes_{i=1}^N H_i$ ,

und  $A$  ist Projektor auf  $H_A$ , den Unterraum der total antisymmetrischen Vektoren von  $\bigotimes_{i=1}^N H_i$ . Es gilt nämlich:

$$P_{\beta} S = S P_{\beta} = S, \quad (1.2.4)$$

$$P_{\beta} A = A P_{\beta} = \varepsilon_{\beta} A. \quad (1.2.5)$$

Somit ergibt die Wirkung von  $S$  bzw.  $A$  auf einen beliebigen Vektor einen total symmetrischen bzw. total antisymmetrischen Vektor.

Von einem beliebigen Basisvektor aus  $\bigotimes_{i=1}^N H_i$  gelangt man zu einem physikalischen Basisvektor, also einem der nach dem Symmetrisierungspostulat das System beschreibt, durch Anwendung der Symmetrisierungsoperatoren  $S$  bzw.  $A$ . Das Symmetrisierungspostulat schränkt also den Hilbertraum  $\bigotimes_{i=1}^N H_i$  auf die Unterräume  $H_S$  und  $H_A$  ein [2].

Teilchen, die durch symmetrische Vektoren beschrieben werden, heißen Bosonen. Teilchen, die durch antisymmetrische Zustände beschrieben werden, heißen Fermionen.

Eine sehr wichtige Folgerung aus dem Symmetrisierungspostulat ist, dass Bosonen Zustände mehrfach besetzen können, während dies für Fermionen nicht möglich ist, da hier der Zustandsvektor zum Nullvektor wird, sobald zwei Teilchen im selben Zustand sind. Dies sei anhand eines Zweiteilchenzu-

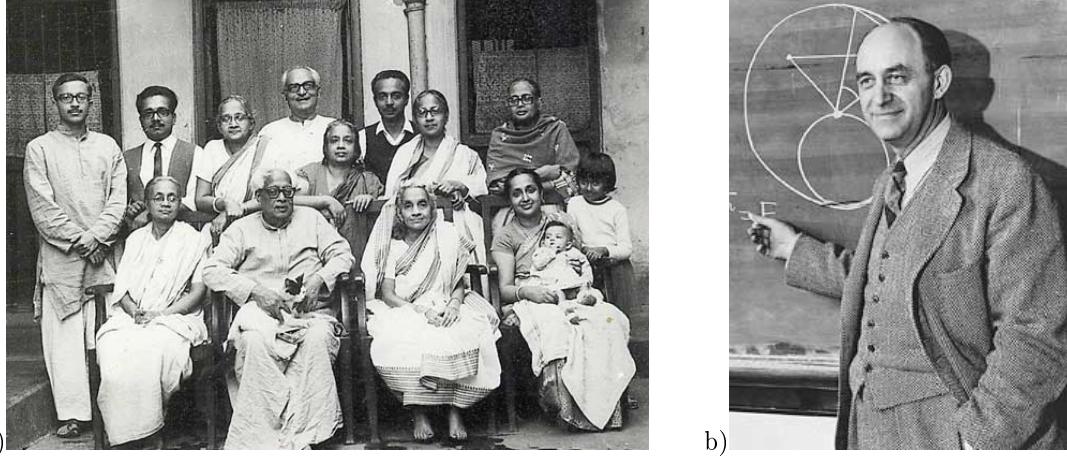


Abbildung 3: a) Die Familie Bose bei einem Gruppenfoto. b) E. Fermi vor einer Tafel.

stands aufgezeigt:

$$S |1 : \varphi; 2 : \varphi\rangle = \frac{1}{2} (|1 : \varphi; 2 : \varphi\rangle + |1 : \varphi; 2 : \varphi\rangle) = |1 : \varphi; 2 : \varphi\rangle , \quad (1.2.6a)$$

$$A |1 : \varphi; 2 : \varphi\rangle = \frac{1}{2} (|1 : \varphi; 2 : \varphi\rangle - |1 : \varphi; 2 : \varphi\rangle) = 0 . \quad (1.2.6b)$$

Dass für Bosonen eine mehrfache Besetzung von Zuständen möglich ist, soll in Abbildung 3 a) veranschaulicht werden. So wie die Familie Bose sich für dieses Gruppenfoto dicht drängt, so verhalten sich auch die Bosonen. Fermionen verhalten sich so wie ihr Namensgeber in Abbildung 3 b): Ihnen ist es nur möglich, einen Zustand einfach zu besetzen.

Ein weiterer, davon zunächst unabhängiger Zugang zu den zwei verschiedenen Teilchenklassen liefert die quantenmechanische Beschreibung des Drehimpulses. Im Stern-Gerlach-Experiment stellt man fest, dass Elementarteilchen eine innere Eigenschaft haben, mit der ein magnetisches Moment verknüpft ist. Diese Eigenschaft lässt sich durch den Eigendrehimpuls, den Spin, der Teilchen beschreiben. Behandelt man den Drehimpuls quantenmechanisch, so stellt man fest, dass das Quadrat eines Drehimpulsoperators die Eigenwerte  $j(j+1)\hbar^2$  mit ganz- oder halbzahligem  $j$  annehmen kann. Der Operator einer Komponente des Drehimpulses (meist als  $z$ -Komponente bezeichnet) kann dann nur die Eigenwerte  $m\hbar$  mit  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$  annehmen. Diese beiden Quantenzahlen charakterisieren den quantenmechanischen Drehimpuls vollständig. Da es sich beim Spin um innere Eigenschaften der Teilchen handelt, ändert sich dieser nicht. So hat also ein Teilchen entweder eine ganz- oder eine halbzahlige Spinquantenzahl. Diejenigen Teilchen mit ganzzahliger Quantenzahl heißen Bosonen und diejenigen Teilchen mit halbzahliger Quantenzahl heißen Fermionen.

Den Zusammenhang zwischen dem Spin eines Teilchens und der Symmetrie der Zustandsvektoren liefert die relativistische Quantenfeldtheorie im Rahmen des Spin-Statistik-Theorems von Pauli. Es lässt sich dort zeigen, dass Felder, die Teilchen mit halbzahligem Spin beschreiben, wie z.B. das Dirac-Feld, nur fermionisch sind und Felder, die Teilchen mit ganzzahligem Spin beschreiben, wie z.B. das Klein-Gordon-Feld, nur bosonisch quantisiert werden können. Sowohl die bosonische Quantisierung des Dirac-Feldes als auch die fermionische Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes führen zu Widersprüchen und müssen deshalb ausgeschlossen werden [3].

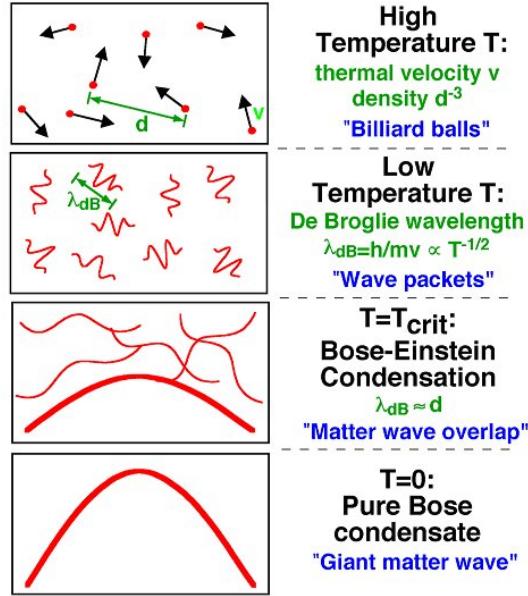


Abbildung 4: Definition des kritischen Punkts durch die de Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{dB}$  und den interatomaren Abstand  $d$ .

### 1.3 Phänomenologischer Zugang zur kritischen Temperatur

Einen phänomenologischen Zugang zur kritischen Temperatur des freien, idealen Bose-Gases vermittelt die Abbildung 4. Es stellt einen Zusammenhang zwischen dem interatomaren Abstand  $d$  der Teilchen, ihrer thermischen de Broglie-Wellenlänge  $\lambda_{dB}$ , welche ein Maß für die Ausdehnung der Wellenpakete der Teilchen ist, und der kritischen Temperatur  $T_C$  her.

Die de Broglie-Wellenlänge der Teilchen berechnet sich durch:

$$\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{Mv} . \quad (1.3.1)$$

Ersetzt man in (1.3.1) den Impuls  $Mv$  durch den thermischen Impuls eines idealen, freien Gases, so ergibt sich:

$$\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{(2Mk_B T)^{1/2}} . \quad (1.3.2)$$

Man erkennt die Proportionalität  $\lambda_{dB} \propto T^{-1/2}$ , die sich in Abbildung 4 durch eine Vergrößerung der dargestellten Wellenpakete von hohen zu niedrigen Temperaturen hin widerspiegelt.

Der interatomare Abstand  $d$  ist dadurch definiert, dass sich gerade ein Teilchen in jedem Würfel der Kantenlänge  $d$  befindet. Mit dieser Definition ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen Teilchendichte  $n$  und dem Abstand  $d$ :

$$n = \frac{1}{d^3} . \quad (1.3.3)$$

In Abbildung 4 ist nun folgender Gedanke veranschaulicht: Die Ausbildung einer makroskopischen Grundzustandswellenfunktion beginnt, sobald die Wellenpakete der Teilchen interferenzfähig werden, sie sich also überlappen. Dies ist der Fall, sobald die de Broglie-Wellenlänge in die Größenordnung des interatomaren Abstands  $d$  gelangt. Somit ist die kritische Temperatur  $T_C$  nach diesem Ansatz durch

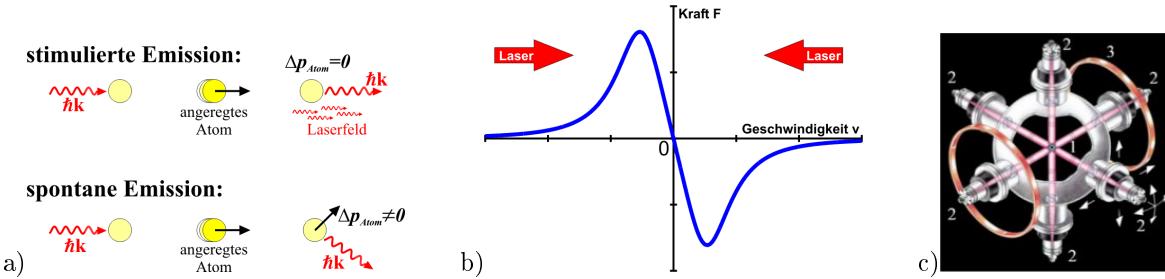


Abbildung 5: a) Mögliche Elementarprozesse bei der Absorption und Reemission von Photonen. b) Geschwindigkeitsabhängige Kraft beim Laserkühlen. c) Schematische Darstellung der Versuchsanordnung.

die Bedingung

$$\lambda_{dB,C} \approx d \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_{dB,C}}{d} \approx 1 \quad (1.3.4)$$

gegeben. Ersetzt man in (1.3.4)  $d$  durch  $n$  gemäß (1.3.3), so erhält man:

$$\frac{\lambda_{dB,C}}{d} = (\lambda_{dB,C}^3 n)^{1/3}. \quad (1.3.5)$$

Aus einer zu Abschnitt 2.4 analogen Berechnung der kritischen Temperatur des idealen, freien Bose-Gases ergibt sich die Beziehung:

$$\lambda_{dB,C}^3 n = \zeta(3/2) \approx 2,612. \quad (1.3.6)$$

Dabei ist  $\lambda_{dB,C}$  durch (1.3.2) gegeben und  $\zeta(z) = \sum_{j=1}^{\infty} 1/j^z$  bezeichnet die Riemannsche Zeta-Funktion. Setzt man (1.3.6) in (1.3.5) ein, so ergibt sich:

$$\frac{\lambda_{dB,C}}{d} = (\lambda_{dB,C}^3 n)^{1/3} \approx (2,612)^{1/3} \approx 1,377 \approx 1. \quad (1.3.7)$$

Aufgrund dieser Gleichung ist der in Abbildung 4 dargestellte, anschauliche Zugang zur kritischen Temperatur berechtigt.

## 1.4 Laserkühlung

Die Idee der Laserkühlung ist eine sehr einfache: Wenn man in einer Falle befindliche Atome bzw. Moleküle mit resonantem Licht bestrahlt, so werden sie durch Absorption der Photonen und dem damit verbundenen Impulsübertrag, ihre kinetische Energie und damit ihre Temperatur verändern. Nach Absorption eines Photons befindet sich ein Teilchen in einem elektronisch angeregten Zustand. Nach einer gewissen Zeit wird es unter Reemission eines Photons derselben Frequenz, wie die des absorbierten Photons, wieder in den Grundzustand übergehen. Wie man in Abbildung 5 a) erkennt, ist die spontane Reemission isotrop. Fällt also ein Atom spontan in seinen Grundzustand zurück, so ist die Richtung des reemittierten Photons zufällig. Da die Photonen aber vor der Absorption eine Vorzugsrichtung hatten, werden die Teilchen in diese Richtung beschleunigt bzw. abgebremst. Eine Verringerung der kinetischen Energie findet nur dann statt, wenn sich das absorbierende Teilchen auf die Lichtquelle zu bewegt. Um dies zu erreichen und stimulierte Emission zu unterbinden, nutzt man

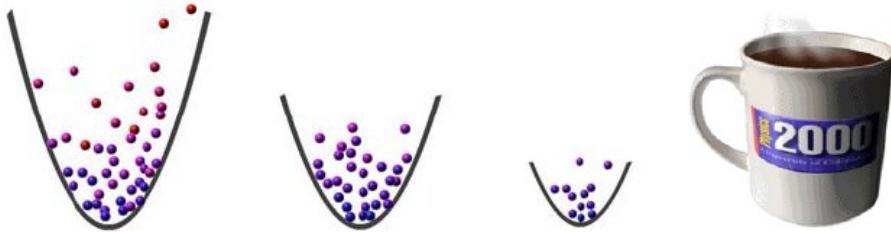


Abbildung 6: Veranschaulichung der evaporativen Kühlung.

den Effekt der Dopplerverschiebung. Sich auf die Lichtquelle zu bewegende Teilchen “sehen” das Licht unter einer anderen Frequenz als solche, die sich von der Lichtquelle fortbewegen oder ruhen. Man stimmt also die genutzte Laserfrequenz so ein, dass das Licht nur für die Teilchen, die sich auf die Lichtquelle zu bewegen, resonant ist. Wenn man zwei gegenläufige Laser mit gleicher Frequenz in allen drei Raumrichtungen nutzt, so ergibt sich für jede Richtung eine geschwindigkeitsabhängige Kraft, wie sie in Abbildung 5 b) dargestellt ist [4].

Die Teilchenfalle wird in Experimenten meist durch Magnetspulen in Helmholtz-Anordnung erzeugt, d.h. der Abstand der Spulen entspricht gerade ihrem Radius (siehe Abbildng 5 c)). Um einen parabelförmigen Bereich im Potentialverlauf zu erhalten, muss der Strom durch die Spulen gegenläufig sein:  $I_1 = -I_2$ .

Eine natürliche Grenze der Laserkühlung ist durch die Reemission gegeben: Die Teilchen haben nach der Reemission immer einen mindestens so großen Impuls wie der der Photonen. Mit der Laserkühlung erreicht man daher den  $\mu\text{K}$ -Bereich.

## 1.5 Evaporative Kühlung

Noch tiefere Temperaturen als mit der Laserkühlung erreicht man mit der evaporativen Kühlung, die auch Verdampfungskühlung genannt wird. Die Idee ist sogar noch einfacher als die der Laserkühlung: Die Teilchen befinden sich im harmonischen Potential, welches eine gewisse Höhe hat. Durch Stöße und andere Wechselwirkung zwischen den Teilchen finden ständig Energieüberträge zwischen den Teilchen statt. Auf diese Weise können Teilchen ohne äußere Einwirkung zu Energien gelangen, die oberhalb der Potentialhöhe liegen. Solche Teilchen entweichen dann aus der Falle und die zurückbleibenden Teilchen haben eine geringere Temperatur. Senkt man schrittweise die Potentialhöhe ab, so beschleunigt sich die Kühlwirkung, wie in Abbildung 6 dargestellt [5]. Mit der evaporativen Kühlung erreicht man nK-Bereich.

Es drängt sich der Vergleich mit dem Kühlmechanismus von Kaffee in einer Tasse auf: So wie der Kaffee seine Temperatur verringert, in dem er heiße Moleküle in Form von Kaffeedampf abgibt, so wird auch die Temperatur der Teilchen in der Falle durch Abgabe von “heißen” Teilchen verringert.

## 2 Thermodynamik

### 2.1 Großkanonische Gesamtheit

Ziel der Thermodynamik ist es, ein gegebenes System mit großer Teilchenzahl  $N$  durch makroskopisch zugängliche Größen wie Temperatur, Druck, Volumen usw. zu beschreiben. Man möchte von den möglichen Mikrozuständen auf diese makroskopischen Größen schließen. Der elementare Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit  $\rho_i$  eines Mikrozustands  $i$  und der makroskopischen Größe Entropie  $S$  ist nach Boltzmann durch folgende Gleichung gegeben:

$$S = -k_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i . \quad (2.1.1)$$

Befindet sich das System im thermodynamischen Gleichgewicht, hat es also einen bestimmten Erwartungswert  $E$  für seine innere Energie und darüber hinaus im Mittel  $N$  Teilchen, so gilt:

$$E = \sum_i \rho_i E_i , \quad (2.1.2a)$$

$$N = \sum_i \rho_i N_i . \quad (2.1.2b)$$

Die rechten Seiten der Gleichungen (2.1.2a) und (2.1.2b) sind die Erwartungswerte der inneren Energie bzw. der Teilchenzahl, wie sie nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gegeben sind, wenn  $E_i$  bzw.  $N_i$  die innere Energie bzw. Teilchenzahl des Mikrozustands  $i$  ist. Außerdem ist die Wahrscheinlichkeitsnormierung durch

$$1 = \sum_i \rho_i \quad (2.1.2c)$$

gegeben. Mit diesen Bedingungen kann man nun nach dem Prinzip der Maximierung der Entropie die Wahrscheinlichkeit für den Mikrozustand  $i$  berechnen. Um die Nebenbedingungen (2.1.2) im Ausdruck für die Entropie zu berücksichtigen, verwendet man die Methode der Lagrange-Parameter:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_i} \left[ -k_B \sum_i \rho_i \ln \rho_i - \lambda \left( \sum_i \rho_i - 1 \right) - \kappa \left( \sum_i \rho_i E_i - E \right) - \eta \left( \sum_i \rho_i N_i - N \right) \right] \stackrel{!}{=} 0 . \quad (2.1.3)$$

Durch einen Vergleich mit der phänomenologischen Thermodynamik identifiziert man die Lagrange-Parameter  $\kappa$  und  $\eta$  mit dem chemischen Potential  $\mu$  und der Temperatur  $T$ . Es ergibt sich die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\rho_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} , \quad (2.1.4)$$

wobei  $\beta = 1/k_B T$  ist.  $Z$  wird als Zustandssumme bezeichnet und ist durch folgenden Ausdruck geben:

$$Z = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} . \quad (2.1.5)$$

Aus der phänomenologischen Thermodynamik ist der Zusammenhang zwischen Entropie  $S$  und der freien Energie  $F$  bekannt:

$$S(T, V, \mu) = -\left. \frac{\partial F}{\partial T} \right|_{V, \mu} . \quad (2.1.6)$$

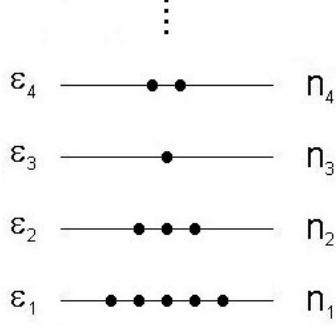


Abbildung 7: Veranschaulichung der Besetzungszahldarstellung.

Aus Wahrscheinlichkeitsverteilung  $\rho_i$  (2.1.4) und der Entropie (2.1.1) ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Entropie  $S$  und der Zustandssumme  $Z$ . Durch Integration von (2.1.6) folgt hieraus die freie Energie  $F$ :

$$F(T, V, \mu) = -\frac{\ln Z}{\beta}. \quad (2.1.7)$$

Außerdem gilt der Zusammenhang

$$N(T, V, \mu) = -\left. \frac{\partial F}{\partial \mu} \right|_{T, V} \quad (2.1.8)$$

zwischen Teilchenzahl  $N$  und freier Energie  $F$  [6].

## 2.2 Besetzungszahldarstellung

Die Besetzungszahldarstellung stellt eine kompakte Schreibweise für die symmetrierten Basisvektoren dar, wie sie in Abschnitt 1.2 eingeführt wurden. Die Definitionsgleichung für einen Vektor in Besetzungszahldarstellung lautet [2]:

$$|n_1, n_2, \dots\rangle := c \left. \frac{S}{A} \right| |1 : \varphi_1; 2 : \varphi_1; \dots; n_1 : \varphi_1; n_1 + 1 : \varphi_2; \dots; n_1 + n_2 : \varphi_2; \dots\rangle. \quad (2.2.1)$$

Für einen bosonischen Zustand muss der Symmetrisierungsoperator  $S$  gemäß (1.2.15a) verwendet werden und für einen fermionischen Zustand der Antisymmetrisierungsoperator  $A$  (1.2.15b).

Die Besetzungszahlen  $n_i$  geben also an, wie viele Teilchen sich im Zustand  $i$  befinden. Für ein  $N$ -Teilchen-System gilt dann natürlich  $\sum_i n_i = N$ . Die Normierungskonstante  $c$  hängt davon ab, ob Zustände mehrfach auftreten. Es gilt:

$$c = \begin{cases} \sqrt{N! / n_1! n_2! \dots} & \text{für Bosonen,} \\ \sqrt{N!} & \text{für Fermionen.} \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Abbildung 7 veranschaulicht exemplarisch die Besetzungszahldarstellung, wobei die Einteilchen-Zustände mit  $\varepsilon_i$  bezeichnet sind. Der gezeigte Zustand hätte in Besetzungszahldarstellung die Notation  $|5, 3, 1, 2, 0, 0, \dots\rangle$ , sofern alle anderen Zustände unbesetzt wären.

Um ein System mit variabler Teilchenzahl  $N$  zu beschreiben, bietet sich der Fock-Raum an. Dieser ist die direkte Summe aus allen  $N$ -Teilchen-Hilberträumen:

$$F := \bigoplus_{N=0}^{\infty} H_N . \quad (2.2.3)$$

Da der Fock-Raum die direkte Summe der  $N$ -Teilchen-Räume ist, bilden deren Basen eine Basis des Fock-Raums:

$$\left\{ |N; n_1, n_2, \dots\rangle \mid \sum_{\mu} n_{\mu} = N, N = 0, 1, 2, 3, \dots \right\} .$$

Es sei bemerkt, dass hier eine neue Notation der Besetzungszahldarstellung eingeführt ist: Als man nur im  $H_N$  operierte, war eine Angabe der Gesamtteilchenzahl  $N$  nicht notwendig, hier sie es allerdings.

Im Fock-Raum kann man nun die Erzeuger und Vernichter wie folgt definieren:

$$\hat{a}_{\nu}^{\dagger} : F \times H \rightarrow F \quad (2.2.4a)$$

$$|N; \dots, n_{\nu}, \dots\rangle \rightarrow \sqrt{n_{\nu} + 1} |N + 1; \dots, n_{\nu} + 1, \dots\rangle , \quad (2.2.4b)$$

$$\hat{a}_{\nu} : F \times H \rightarrow F \quad (2.2.4c)$$

$$|N; \dots, n_{\nu}, \dots\rangle \rightarrow \sqrt{n_{\nu}} |N - 1; \dots, n_{\nu} - 1, \dots\rangle . \quad (2.2.4d)$$

$H$  ist der Einteilchen-Hilbertraum.  $\hat{a}_{\nu}^{\dagger}$  erzeugt also ein Teilchen im Zustand  $|\varphi_{\nu}\rangle$ , während  $\hat{a}_{\nu}$  ein Teilchen in diesem Zustand vernichtet. Die oben eingeführte Definition suggeriert bereits, dass  $\hat{a}_{\nu}^{\dagger}$  und  $\hat{a}_{\nu}$  zueinander adjungierte Operatoren sind, was durch eine einfache Rechnung nachgewiesen werden kann.

Mit diesen Definitionen kann nun ein Einteilchen-Operator  $\hat{B}$  durch  $\hat{a}_{\nu}$  und  $\hat{a}_{\nu}^{\dagger}$  ausgedrückt werden:

$$\hat{B} = \sum_{\lambda, \mu} \langle \varphi_{\lambda} | b | \varphi_{\mu} \rangle \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\mu} , \quad (2.2.5)$$

wobei  $b$  der im Einteilchen-Hilbertraum wirkende Operator ist, aus dem sich  $\hat{B}$  additiv zusammensetzt. Der Operator

$$\hat{N} := \sum_{\nu} \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu} =: \sum_{\nu} \hat{n}_{\nu} \quad (2.2.6)$$

mit  $\hat{n}_{\nu} = \hat{a}_{\nu}^{\dagger} \hat{a}_{\nu}$  erfüllt die Eigenwertgleichung:

$$\hat{N} |N; n_1, n_2, \dots\rangle = N |N; n_1, n_2, \dots\rangle . \quad (2.2.7)$$

$\hat{N}$  ist selbstdadjungiert und wird als Teilchenzahloperator bezeichnet. Die Operatoren  $\hat{n}_{\nu}$  stellen die Besetzungszahloperatoren dar, da ihre Eigenwerte  $n_{\nu}$  die Besetzungszahlen sind [7, 8].

Es wird nun ein System von nicht wechselwirkenden Atomen in der Besetzungszahldarstellung betrachtet. Als Basis des Einteilchen-Hilbertraums werden die Eigenfunktionen  $\{|\varphi_{\nu}\rangle\}$  des Einteilchen-Hamilton-Operators  $h$  mit den Eigenwerten  $\varepsilon_{\nu}$  gewählt. Dann ist der Hamilton-Operator nach Gleichung (2.2.5) gegeben durch:

$$\hat{H} = \sum_{\lambda, \mu} \langle \varphi_{\lambda} | h | \varphi_{\mu} \rangle \hat{a}_{\lambda}^{\dagger} \hat{a}_{\mu} = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} \hat{n}_{\lambda} . \quad (2.2.8)$$

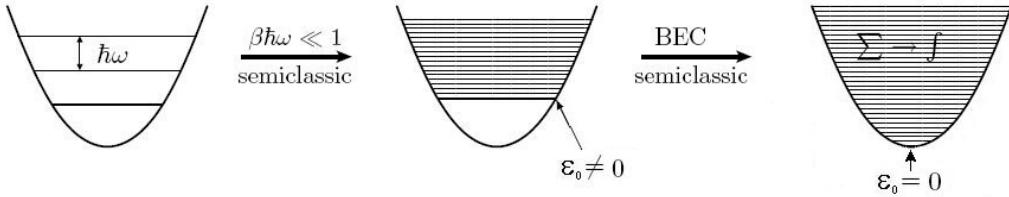


Abbildung 8: Schematische Darstellung der Grundgedanken der semiklassischen Näherung.

Die Eigenwerte des Hamilton-Operators sind dann:

$$E_i = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} n_{\lambda}, \quad (2.2.9)$$

wobei der Mikrozustand  $i$  durch einen festen Satz von Besetzungszahlen  $n_{\lambda}$  gegeben ist. Entsprechend ergibt sich die Teilchenzahl eines Mikrozustands durch den Eigenwert des Teilchenzahloperators:

$$N_i = \sum_{\lambda} n_{\lambda}. \quad (2.2.10)$$

Betrachtet man nun ein großkanonisches Ensemble aus Systemen von Teilchen ohne Wechselwirkung, so ist die Zustandssumme durch

$$Z = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} = \sum_{n_{\lambda}} e^{-\beta \sum_{\lambda} n_{\lambda} (\varepsilon_{\lambda} - \mu)} = \prod_{\lambda} \sum_{n_{\lambda}} e^{-\beta n_{\lambda} (\varepsilon_{\lambda} - \mu)} \quad (2.2.11)$$

gegeben. Für Bosonen läuft die Summe über  $n_{\lambda}$  von 0 bis  $\infty$  und die sich ergebende geometrische Reihe konvergiert für  $\mu < \varepsilon_{\lambda}$  gegen:

$$Z = \prod_{\lambda} \left[ 1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)} \right]^{-1}. \quad (2.2.12)$$

Daraus ergibt sich die freie Energie  $F$  gemäß (2.1.7) zu:

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ \prod_{\lambda} \left[ 1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)} \right]^{-1} \right\} = \frac{1}{\beta} \sum_{\lambda} \ln \left[ 1 - e^{-\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)} \right]. \quad (2.2.13)$$

Aus diesem Ausdruck ergibt sich die Teilchenzahl nach (2.1.8) zu:

$$N = -\frac{\partial F}{\partial \mu} = \sum_{\lambda} \left[ e^{\beta(\varepsilon_{\lambda} - \mu)} - 1 \right]^{-1}. \quad (2.2.14)$$

Demnach setzt sich die Teilchenzahl  $N$  aus den mittleren Teilchenzahlen zusammen, die durch die Bose-Einstein-Verteilung beschrieben werden.

## 2.3 Semiklassische Näherung

Nun soll die semiklassische Näherung zur Auswertung der Summe (2.2.14) vorgestellt werden, deren Grundgedanken in Abbildung 8 veranschaulicht sind.

Da der quantenmechanische Grundzustand makroskopisch besetzt werden kann, muss dieser separat behandelt werden. Hierzu wird der Summand für  $\lambda = 0$  aus der Summe (2.2.14) herausgezogen:

$$N = N_0 + \sum_{\lambda \neq 0} \left[ e^{\beta(\varepsilon_\lambda - \mu)} - 1 \right]^{-1}. \quad (2.3.1)$$

Die Summe über die diskreten Energieniveaus  $\varepsilon_\lambda$  soll in ein Integral über ein Energiekontinuum überführt werden. Um die Summe durch den Grenzwert einer Riemannschen Summe, also durch das Integral, ersetzen zu können, ist es notwendig, dass die zu summierende Funktion sehr kleine “Sprünge” macht. Mit der Forderung, dass das Argument der Exponentialfunktion kleine “Sprünge” macht, ist diese Bedingung erfüllt. Die semiklassische Näherung ist also unter der Bedingung

$$\beta\varepsilon_\lambda \xrightarrow[\text{Osz.}]{\text{harm.}} \beta\hbar\omega \ll 1 \quad (2.3.2)$$

eine sinnvolle Näherung. Typische Zahlenwerte der Fallfrequenz liegen bei  $\tilde{f} = \tilde{\omega}/2\pi \approx 100$  Hz, so dass bei Temperaturen in der Umgebung des kritischen Punktes von  $T \approx 100$  nK die Bedingung (2.3.2) erfüllt ist:  $\beta\hbar\tilde{\omega} \approx 0,048$ .

Zuletzt wird nun auch über Energien unterhalb der Grundzustandsenergie integriert, also die Grundzustandsenergie  $\varepsilon_0 = 0$  gesetzt. Dies ist insofern inkonsistent, da der Grundzustand ja von der Summe separiert wurde. Die Grundzustandsenergie ergibt sich aus quantenmechanischen Rechnungen für den harmonischen Oszillator in drei Raumdimensionen zu  $\varepsilon_0 = 3\hbar\omega/2$ . Aufgrund der Bedingung (2.3.2) ist es aber gerechtfertigt, diese formal auf Null zu setzen.

Somit ergibt sich die Teilchenzahl in semiklassischer Näherung zu:

$$N = N_0 + \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \left[ e^{\beta[H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu]} - 1 \right]^{-1}. \quad (2.3.3)$$

Hier wurden die diskreten Energien  $\varepsilon_\lambda$  durch die klassische Hamilton-Funktion  $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  ersetzt [9].

## 2.4 Ideales Bose-Gas in harmonischer Falle

Die im letzten Abschnitt erarbeiteten Ergebnisse sollen nun auf den Fall des idealen Bose-Gases in einem harmonischen Fallpotential angewandt werden. Die Hamilton-Funktion ist dann gegeben durch:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{M}{2} \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2. \quad (2.4.1)$$

Mit der Abkürzung  $z = e^{-\beta[H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - \mu]}$  hat die Bose-Einstein-Verteilung die Form:

$$\frac{1}{z^{-1} - 1} = \frac{z}{1-z} = \sum_{j=1}^{\infty} z^j, \quad (2.4.2)$$

wobei sich die rechte Seite durch Reihenentwicklung des Bruchs um den Punkt  $z_0 = 0$  ergibt. Mit

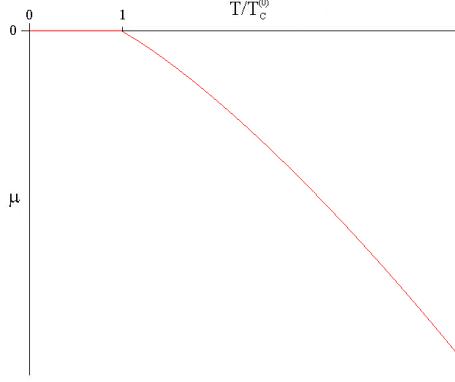


Abbildung 9: Temperaturabhängigkeit des chemischen Potential für ein ideales Bose-Gas.

dieser Gleichung wird die Teilchenzahl (2.3.3) zu:

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \int \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\beta j [\frac{M}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + \frac{1}{2M}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \mu]} . \quad (2.4.3)$$

Die sechs Gauß-Integrale können gelöst werden und es folgt:

$$N = N_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left( \frac{2\pi}{j\beta M} \right)^{3/2} \frac{1}{(\omega_x^2 \omega_y^2 \omega_z^2)^{1/2}} \left( \frac{2\pi M}{j\beta} \right)^{3/2} e^{\beta j \mu} = N_0 + \frac{\zeta_3(e^{\beta\mu})}{(\beta\hbar\tilde{\omega})^3} . \quad (2.4.4)$$

Dabei ist  $\tilde{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  das geometrische Mittel aus den Fallfrequenzen und  $\zeta_\nu(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j / j^\nu$  eine Verallgemeinerung der Riemannschen Zeta-Funktion, die so genannte polylogarithmische Funktion.

Gleichung (2.4.4) stellt eine implizite Gleichung für  $\mu(T)$  für Temperaturen  $T > T_C^{(0)}$  dar. In Abbildung 9 ist ein entsprechender Plot dargestellt. Man erkennt, dass es eine kritische Temperatur  $T_C^{(0)}$  gibt, bei der das chemische Potential den Wert Null annimmt und damit mit der Grundzustandsenergie der semiklassischen Näherung übereinstimmt.

Das chemische Potential gibt die aufzubringende Energie an, um ein weiteres Teilchen ins thermodynamische Gleichgewicht des Systems einzufügen. Wenn nun fast alle Teilchen im Grundzustand sind, so wird diese Energie gerade der Grundzustandsenergie entsprechen. Somit definiert die Temperatur, bei der das chemische Potential die Grundzustandsenergie annimmt, die kritische Temperatur bei der die Bose-Einstein-Kondensation beginnt. Außerdem sind in der Hochtemperaturphase die meisten Teilchen in angeregten Zuständen oder genauer formuliert: der Quotient  $N_0/N$  verschwindet, so dass die Grundzustandsbesetzung  $N_0$  zu vernachlässigen ist. Diese Überlegungen zusammengefasst ergeben also die Beziehungen:

$$\text{Gas-Phase } T \geq T_C^{(0)} : \quad N_0/N = 0, \quad \mu \leq 0 , \quad (2.4.5a)$$

$$\text{Kondensat-Phase } T \leq T_C^{(0)} : \quad N_0/N \geq 0, \quad \mu = 0 . \quad (2.4.5b)$$

Am kritischen Punkt sind dann beide Bedingungen (2.4.5a) und (2.4.5b) erfüllt, so dass gilt:

$$T = T_C^{(0)} : \quad N_0/N = 0, \quad \mu = 0 . \quad (2.4.6)$$

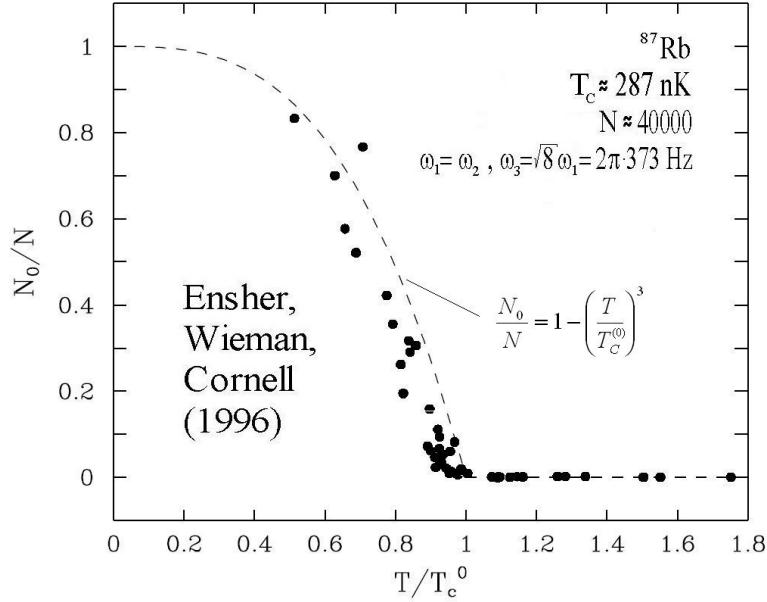


Abbildung 10: Temperaturabhängigkeit der kondensierten Atome: Vergleich zwischen der semiklassischen Theorie des idealen Bose-Gases (gestrichelte Linie) in einer harmonischen Falle mit dem Experiment (Punkte).

Diese Bedingungen eingesetzt in Gleichung (2.4.4) ergibt:

$$T_C^{(0)} = \frac{\hbar\tilde{\omega}}{k_B} \left[ \frac{N}{\zeta(3)} \right]^{1/3}, \quad (2.4.7)$$

wobei zu beachten ist, dass die polylogarithmische Funktion für den Argumentwert Null in die Riemannsche Zeta-Funktion übergeht:  $\zeta_\nu(0) = \zeta(\nu)$ .

Die semiklassische Näherung  $\beta\hbar\tilde{\omega} \rightarrow 0$  impliziert den thermodynamischen Limes  $N \rightarrow \infty$ , wie man in Gleichung (2.4.4) erkennt. Damit  $T_C^{(0)}$  auch für  $N \rightarrow \infty$  endlich und konstant bleibt, muss gefordert werden, dass

$$\hbar\tilde{\omega}N^{1/3} = \text{const} \quad (2.4.8)$$

gilt. Für große  $N$  und sehr flache Fallenpotentiale muss also Bedingung (2.4.8) gewahrt bleiben. Hier hat man also eine ähnliche Situation, nämlich  $N \rightarrow \infty$ ,  $\hbar\tilde{\omega} \rightarrow \infty$ ,  $\hbar\tilde{\omega}N^{1/3} = \text{const}$ , wie beim homogenen Bose-Gas. Für dieses ist der thermodynamische Limes durch  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $N/V = \text{const}$  definiert.

## 2.5 Korrekturen

Aus der Teilchenzahl (2.4.4) gewinnt man die Temperaturabhängigkeit der relativen Besetzung des Grundzustands  $N_0/N$ . In der Tieftemperaturphase  $T < T_C^{(0)}$  gilt  $\mu = \varepsilon_0 = 0$ , so dass aus (2.4.4) mit (2.4.7) folgt:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_C^{(0)}} \right)^3. \quad (2.5.1)$$

In Abbildung 10 werden die Daten eines Experiments von Cornell, Wieman und Ensher aus dem

Jahr 1996, welches mit  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen durchgeführt wurde, mit dieser Funktion verglichen. Man erkennt, dass die experimentell bestimmte kritische Temperatur kleiner als die theoretisch vorhergesagte ist.

Dies lässt sich damit begründen, dass in der Rechnung aus Abschnitt 2.4 einige vereinfachende Annahmen getroffen wurden. So wurde der Grenzwert  $\beta\hbar\omega \rightarrow 0$  betrachtet, welcher den Grenzwert  $N \rightarrow \infty$  impliziert. Außerdem wurde von einem idealen, also einem wechselwirkungsfreien Bose-Gas ausgegangen. In diesem Abschnitt sollen nun Korrekturen zu diesen Vereinfachungen vorgestellt werden.

Wir behandeln zunächst Korrekturen, die die Endlichkeit des realen Systems berücksichtigen, also Korrekturen zum Grenzwert  $N \rightarrow \infty$ , die Finite-Size-Korrekturen genannt werden. Die Einschränkung auf Systeme, für die  $\beta\hbar\omega \rightarrow 0$  im Bereich der kritischen Temperatur gilt, war notwendig, um die Summe in (2.3.1) in ein Integral zu überführen. Ausgangspunkt der Finite-Size-Korrekturen soll nun eine Verbesserung dieser Approximation sein. Dies geschieht durch die Euler-MacLaurin-Formel [9], welche eine exakte mathematische Identität für eine Summe über diskrete Funktionswerte  $f(k)$  ist:

$$\sum_{a \leq k \leq b} f(k) = \int_a^b f(t) dt + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] + \dots . \quad (2.5.2)$$

Man sieht, dass der erste Summand der rechten Seite von (2.5.2) gerade dem Approximationsintegral entspricht, wie es in Abschnitt 2.4 verwendet wurde. Um diese Approximation zu verbessern, wird nun auch der zweite Summand ausgewertet. So erhält man einen neuen Ausdruck für die Teilchenzahl:

$$N = N_0 + \frac{\zeta_3(e^{\beta\mu})}{(\beta\hbar\tilde{\omega})^3} + \frac{3\beta\hbar\tilde{\omega}\zeta_2(e^{\beta\mu})}{2(\beta\hbar\tilde{\omega})^3} + \dots , \quad (2.5.3)$$

wobei  $\tilde{\omega} = (\omega_x + \omega_y + \omega_z)/3$  das arithmetische Mittel der Fallfrequenzen ist. Die Teilchenzahl (2.5.3) setzt sich also aus der Teilchenzahl (2.4.4) und einem weiteren Summanden, der Finite-Size-Korrektur, zusammen. Die kritische Temperatur wird aus (2.5.3) mit den gleichen Bedingungen wie in Abschnitt 2.4 gewonnen. Die korrigierte kritische Temperatur lautet:

$$T_C = T_C^{(0)} \left[ 1 - \frac{\zeta(2)\tilde{\omega}}{2\zeta^{3/2}(3)\tilde{\omega}N^{1/3}} + \dots \right] . \quad (2.5.4)$$

Nun sieht man auch, dass die Verbesserung der Abschätzung der Summe (2.2.14) durch die Euler-MacLaurin-Formel die Endlichkeit des Systems  $N < \infty$  beschreibt. Der Korrekturterm in (2.5.4) ist proportional zu  $N^{-1/3}$ , d.h. die korrigierte Temperatur geht für  $N \rightarrow \infty$  in die kritische Temperatur der semiklassischen Näherung  $T_C^{(0)}$  über.

Für typische Zahlenwerte der Teilchenzahl und der Fallfrequenzen, wie sie in Abbildung 10 angegeben sind, ist die Abweichung der korrigierten kritischen Temperatur von der Temperatur  $T_C^{(0)}$  von der Größenordnung  $-2,4\%$  [9]:

$$\frac{\Delta T_C}{T_C^{(0)}} = \frac{T_C - T_C^{(0)}}{T_C^{(0)}} = -\frac{\zeta(2)\tilde{\omega}}{2\zeta^{3/2}(3)\tilde{\omega}N^{1/3}} \approx -2,4\% . \quad (2.5.5)$$

Nun soll die Wechselwirkung zwischen den Teilchen bei der Berechnung der kritischen Temperatur berücksichtigt werden. Hier wird allerdings nur die Stoßwechselwirkung behandelt, welche durch das

Potential

$$v(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = g\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.5.6)$$

modelliert wird. Dabei hängt die Stärke der Stoßwechselwirkung gemäß  $g = 4\pi\hbar^2 a/M$  mit der aus der Streutheorie bekannten s-Wellen-Streulänge  $a$  zusammen. Ebenso wie bei den Finite-Size-Korrekturen wird sich die Teilchenzahl durch Berücksichtigung der Stoßwechselwirkung verändern. Weiter ist hier zu berücksichtigen, dass sich die Grundzustandsenergie  $\varepsilon_0$  durch die Wechselwirkung und damit auch das kritische chemische Potential verändert, welches ja durch  $\mu_C = \varepsilon_0$  gegeben ist. Aus einer Rechnung, die sich auf die Vielteilchen-Störungstheorie in erster Ordnung stützt, ergibt sich die Abweichung der neuen kritischen Temperatur von  $T_C^{(0)}$  zu:

$$\frac{\Delta T_C}{T_C^{(0)}} = -c \frac{a}{\lambda_{\text{dB}}^{(0)}} \approx -4,7\% . \quad (2.5.7)$$

Hierbei ist  $c \approx 3,426$  eine dimensionslose Konstante, die sich aus der oben erwähnten Rechnung auch analytisch angeben lässt. Der Wert von  $-4,7\%$  folgt für die s-Wellen-Streulänge von  $^{87}\text{Rb}$  von  $a(^{87}\text{Rb}) = 90 \cdot 0,0529 \text{ nm}$  und  $\lambda_{\text{dB}}^{(0)}$ , wie es in (1.3.2) gegeben ist.

### 3 Dynamik

#### 3.1 Gross-Pitaevskii-Gleichung

Zu Beginn dieses Kapitels möchte ich an die Überlegungen aus Abschnitt 2.2 anknüpfen. Dort wurde gezeigt, dass ein Einteilchen-Operator im Fock-Raum wie in Gleichung (2.2.5) dargestellt werden kann. Auf analoge Weise ergibt sich die Darstellung eines Zweiteilchen-Operators  $\hat{V}$ :

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,m} \langle \varphi_i, \varphi_j | v | \varphi_k, \varphi_m \rangle \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_k . \quad (3.1.1)$$

Dabei sind  $|\varphi_\nu, \varphi_\mu\rangle = |1 : \varphi_\nu; 2 : \varphi_\mu\rangle$  die nicht symmetrisierten Zweiteilchenzustände und  $v$  der im Zweiteilchen-Hilbertraum wirkende Operator, aus dem sich  $\hat{V}$  additiv zusammensetzt.

Um die Bewegungsgleichung für die Kondensatwellenfunktion, die Gross-Pitaevskii-Gleichung, herzuleiten, ist es notwendig, Erzeuger und Vernichter von Teilchen in den uneigentlichen Zuständen  $|\mathbf{x}\rangle$  zu betrachten: Geht man von der Basis  $\{|\varphi_\nu\rangle\}$  des Einteilchen-Hilbertraums zu einer anderen Basis über, so gilt für die Zustände der neuen Basis:

$$|\chi_\mu\rangle = \sum_\nu \langle \varphi_\nu | \chi_\mu \rangle |\varphi_\nu\rangle . \quad (3.1.2)$$

Mit dieser Transformationsgleichung kann man den Erzeuger und Vernichter eines Teilchen im Zustand  $|\chi_\mu\rangle$  angeben:

$$\hat{a}_{\chi_\mu}^\dagger = \sum_\nu \langle \varphi_\nu | \chi_\mu \rangle \hat{a}_{\varphi_\nu}^\dagger , \quad (3.1.3a)$$

$$\hat{a}_{\chi_\mu} = \sum_\nu \langle \chi_\mu | \varphi_\nu \rangle \hat{a}_{\varphi_\nu} . \quad (3.1.3b)$$

Nun betrachte man den Erzeuger und Vernichter eines Teilchens im uneigentlichen Zustand  $|\mathbf{x}\rangle$ :

$$\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}) := \sum_\nu \langle \varphi_\nu | \mathbf{x} \rangle \hat{a}_\nu^\dagger = \sum_\nu \varphi_\nu^*(\mathbf{x}) \hat{a}_\nu^\dagger , \quad (3.1.4a)$$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}) := \sum_\nu \langle \mathbf{x} | \varphi_\nu \rangle \hat{a}_\nu = \sum_\nu \varphi_\nu(\mathbf{x}) \hat{a}_\nu . \quad (3.1.4b)$$

Die Bewegungsgleichung der Feldoperatoren  $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{\Psi}(\mathbf{x}) e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  in der Heisenberg-Darstellung lautet für den Hamilton-Operator, der sich als Summe von kinetischer Energie, Einteilchen-Potential  $U(\mathbf{x})$  und Zweiteilchen-Wechselwirkung  $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  zusammensetzt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) + \int d^3x' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}', t) V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\Psi}(\mathbf{x}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) . \quad (3.1.5)$$

Diese Gleichung hat die Form einer Schrödingergleichung mit einem nichtlinearen Term, der die Zweiteilchen-Wechselwirkung beschreibt [7].

Betrachtet man den Fall, dass die meisten Teilchen des Systems im Grundzustand sind, so kann man annehmen, dass sowohl die Wirkung des Erzeugers  $\hat{a}_0^\dagger$  als auch die Wirkung des Vernichters  $\hat{a}_0$  eines Teilchens im Grundzustand  $|\varphi_0\rangle$  den Gesamtzustand des Systems nicht sonderlich beeinflussen.

In diesem Fall kann man also die Operatoren  $\hat{a}_0$  und  $\hat{a}_0^\dagger$  durch die Zahl  $\sqrt{N_0}$  mit  $N_0 \gg 1$  ersetzen:

$$\hat{a}_0^\dagger |N; n_1, n_2, \dots\rangle \approx \sqrt{N_0} |N; n_1, n_2, \dots\rangle , \quad (3.1.6a)$$

$$\hat{a}_0 |N; n_1, n_2, \dots\rangle \approx \sqrt{N_0} |N; n_1, n_2, \dots\rangle . \quad (3.1.6b)$$

Diese Näherung respektiert offensichtlich die Forderung, dass der Zustand  $|N; n_1, n_2, \dots\rangle$  ein Eigenzustand des Besetzungszahloperators  $\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$  zum Eigenwert  $N_0$  ist:

$$\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 |N; n_1, n_2, \dots\rangle = N_0 |N; n_1, n_2, \dots\rangle . \quad (3.1.7)$$

Somit setzt sich der Feldoperator  $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$  in dieser Näherung von Bogoliubov aus einem Anteil zusammen, der den Grundzustand durch ein klassisches Feld beschreibt, und einem Anteil, der die angeregten Teilchen beschreibt:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = \Psi_0(\mathbf{x}, t) + \sum_{\nu \neq 0} \varphi_\nu(\mathbf{x}, t) \hat{a}_\nu , \quad (3.1.8)$$

wobei  $\Psi_0(\mathbf{x}, t) = \sqrt{N_0} \varphi_0(\mathbf{x}, t)$  ist [10]. Da die gesuchte Bewegungsgleichung nur den Vielteilchen-Grundzustand beschreiben soll, wird der Anteil der angeregten Teilchen beim Einsetzen von (3.1.8) in (3.1.5) vernachlässigt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0(\mathbf{x}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) \right] \Psi_0(\mathbf{x}, t) + \int d^3x' \Psi_0^*(\mathbf{x}', t) V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Psi_0(\mathbf{x}', t) \Psi_0(\mathbf{x}, t) . \quad (3.1.9)$$

Dies ist die Gross-Pitaevskii-Gleichung in der allgemeinen Form, d.h. ohne Spezifizierung der Zweiteilchenwechselwirkung. In Zukunft wird der Index 0 der Vielteilchen-Grundzustandswellenfunktion weggelassen.

Die Normierung der Vielteilchen-Grundzustandswellenfunktion ergibt sich aus der Beziehung

$$\hat{N} = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) , \quad (3.1.10)$$

welche allgemein für die Feldoperatoren gilt, zusammen mit (3.1.8) unter Vernachlässigung der angeregten Teilchen. Daher ist die Grundzustandswellenfunktion auf  $N$  normiert, d.h.  $N = N_0$ . Die Normierung der Wellenfunktion legt die Interpretation des Betragsquadrates der Wellenfunktion  $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 = \Psi^*(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t)$  als Teilchendichte nahe.

Betrachtet man nur die Stoßwechselwirkung zwischen den Teilchen, die durch das Potential (2.5.6) modelliert wird, so reduziert sich (3.1.9) auf:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) + g |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{x}, t) . \quad (3.1.11)$$

Separiert man Ort- und Zeitanteil:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}) e^{-i\mu t/\hbar} , \quad (3.1.12)$$

so ergibt sich die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 + U(\mathbf{x}) - \mu + g |\Psi(\mathbf{x})|^2 \right] \Psi(\mathbf{x}) = 0 . \quad (3.1.13)$$

### 3.2 Thomas-Fermi-Näherung

Nun soll eine Lösung der zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.1.13) unter Vernachlässigung der kinetischen Energie vorgestellt werden. Zunächst wird aber diese Näherung gerechtfertigt. Hierzu nehmen wir an, das Kondensat habe die mittlere Ausdehnung  $L$ .

Eine Abschätzung der kinetischen Energie ergibt sich aus der Impuls-Orts-Unschärfe:

$$\Delta\mathbf{p}\Delta\mathbf{x} \approx \hbar . \quad (3.2.1)$$

Im Grundzustand ist der Impuls der Teilchen in der Größenordnung der Impulsunschärfe. Außerdem ist die Ortsunschärfe von der Größenordnung  $L$ . Damit ergibt sich eine Abschätzung der kinetischen Energie zu:

$$E_{\text{kin}}(L) = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} \approx \frac{\hbar^2}{2ML^2} . \quad (3.2.2)$$

Die potentielle Energie ist für einen harmonischen Oszillator durch

$$E_{\text{pot}}(L) = \frac{M}{2}\omega^2\mathbf{x}^2 \approx \frac{M}{2}\omega^2L^2$$

gegeben.

Die Wechselwirkungsenergie ist durch  $g|\Psi(\mathbf{x})|^2$  gegeben. Wie in Abschnitt 3.1 argumentiert, wird  $|\Psi(\mathbf{x})|^2$  als Teilchendichte  $n$  interpretiert. Damit lässt sich die Wechselwirkungsenergie durch

$$E_{\text{ww}}(L) = gn \approx g\frac{N}{L^3} \quad (3.2.3)$$

abschätzen.

Man erkennt, dass sowohl im Grenzwert  $L \rightarrow 0$  als auch im Grenzwert  $L \rightarrow \infty$  die kinetische Energie vernachlässigbar ist:

$$L \rightarrow 0 : E_{\text{ww}}(L) \gg E_{\text{kin}}(L), E_{\text{pot}}(L) , \quad (3.2.4a)$$

$$L \rightarrow \infty : E_{\text{pot}}(L) \gg E_{\text{kin}}(L), E_{\text{ww}}(L) . \quad (3.2.4b)$$

Im Rahmen der so genannten Thomas-Fermi-Näherung wird die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung unter Vernachlässigung der kinetischen Energie betrachtet:

$$\left[ U(\mathbf{x}) - \mu + g|\Psi(\mathbf{x})|^2 \right] \Psi(\mathbf{x}) = 0 . \quad (3.2.5)$$

Da nur Lösungen ungleich Null von Interesse sind, ergibt sich daraus:

$$|\Psi(\mathbf{x})|^2 = \frac{\mu - U(\mathbf{x})}{g} . \quad (3.2.6)$$

Diese Gleichung ist nur für

$$\mu - U(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (3.2.7)$$

sinnvoll. Aus dieser Ungleichung ergibt sich eine maximale Ausdehnung  $R_i$  der Kondensatwellenfunk-

tion in einem harmonischen Potential

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{M}{2} \omega_i^2 x_i^2 \quad (3.2.8)$$

für jede Raumrichtung und deren geometrisches Mittel:

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{M\omega_i^2}} \quad , \quad \tilde{R} = \sqrt{\frac{2\mu}{M\tilde{\omega}^2}} . \quad (3.2.9)$$

$\tilde{R}$  wird Thomas-Fermi-Radius genannt.

Das chemische Potential  $\mu$  kann durch die Teilchenzahl  $N$  ausgedrückt werden. Dazu verwendet man die Normierung der Grundzustandswellenfunktion:

$$N = \int d^3x |\Psi(\mathbf{x})|^2 = \frac{1}{g} \int d^3x \left[ \mu - \sum_{i=1}^3 \frac{M}{2} \omega_i^2 x_i^2 \right] . \quad (3.2.10)$$

Die Integrationsgrenzen sind durch (3.2.7) mit dem Fallenzpotential (3.2.8) gegeben, d.h. es wird über einen Ellipsoiden integriert. Durch geeignete Substitution geht man zu einem Integral über eine Kugel über und es ergibt sich:

$$\mu = \frac{15^{2/5}}{2} (aN)^{2/5} \frac{\hbar^{6/5} \tilde{\omega}^{4/5}}{M^{1/5}} . \quad (3.2.11)$$

Wird dies in Gleichung (3.2.9) eingesetzt, so folgt:

$$\tilde{R} = \left( 15aN \sqrt{\frac{M\tilde{\omega}}{\hbar}} \right)^{1/5} \sqrt{\frac{\hbar}{M\tilde{\omega}}} . \quad (3.2.12)$$

Man erkennt hierin die typische Oszillatordicke  $\sqrt{\hbar/M\tilde{\omega}}$ , wie sie aus der Beschreibung des harmonischen Oszillators durch die Schrödinger-Theorie bekannt ist. Der Skalierungsfaktor vor der Oszillatordicke hat für experimentell relevante Parameter einen Zahlenwert größer als Eins, so dass durch die repulsive Wechselwirkung der Thomas-Fermi-Radius  $\tilde{R}$  größer als die Oszillatordicke  $\sqrt{\hbar/M\tilde{\omega}}$  ist.

Verwendet man die Gleichung (3.2.12), so folgt aus (3.2.6) für eine isotrope harmonische Falle ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 := \omega$ ):

$$|\Psi(\mathbf{x})|^2 = \frac{(M\omega R)^2}{8\pi\hbar^2 a} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] . \quad (3.2.13)$$

Diese Funktion, die die Dichte des Kondensats in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zum Potentialminimum angibt, ist in Abbildung 11 dargestellt [11]. Diese Funktion wird mit der exakten Lösung der zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.1.13) für eine isotrope harmonische Falle verglichen, die numerisch gewonnen werden kann. Im Bereich  $r \approx R$  weicht die Thomas-Fermi-Näherung von der exakten Lösung ab, während die beiden Graphen im Bereich  $r \approx 0$  gut übereinstimmen. Dies ist folgendermaßen zu erklären: Für große Teilchenzahlen  $N$  ist die kinetische Energie und damit der Dichtegradient  $\nabla |\Psi(\mathbf{x})|^2$  zu vernachlässigen. Im Bereich  $r \approx 0$  ist die Funktion  $|\Psi(\mathbf{x})|^2$  sehr flach, hat also einen sehr kleinen Gradienten, so dass die Abweichungen dort gering sind.

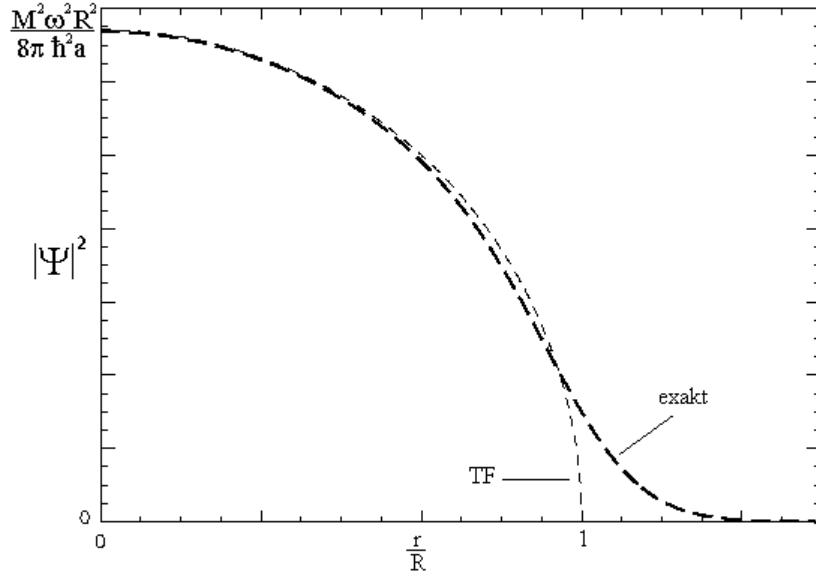


Abbildung 11: Dichte des Kondensats in Abhängigkeit vom Abstand zum Potentialminimum.

### 3.3 Hydrodynamische Gleichungen

Aus der Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.1.11) kann auf gleiche Weise wie in der Schrödinger-Theorie eine Kontinuitätsgleichung gewonnen werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{x}, t) + \nabla \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0 . \quad (3.3.1)$$

Dabei gilt, genau wie in der Schrödinger-Theorie:

$$n(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 , \quad (3.3.2a)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2M_i} [\Psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{x}, t)] . \quad (3.3.2b)$$

In Analogie zur Hydrodynamik wird nun die Stromdichte in das Produkt eines Geschwindigkeitsfeldes und der Teilchendichte zerlegt:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) , \quad (3.3.3a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2M_i} \frac{\Psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi(\mathbf{x}, t) - \Psi(\mathbf{x}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{x}, t)}{\Psi^*(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t)} . \quad (3.3.3b)$$

Da jede komplexe Zahl in Betrag und Phase zerlegt werden kann, wird aufgrund von (3.3.2a) der Ansatz

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{n(\mathbf{x}, t)} e^{i\varphi(\mathbf{x}, t)} \quad (3.3.4)$$

gemacht. Einsetzen dieses Ansatzes in die Definition des Geschwindigkeitsfeldes (3.3.3b) liefert eine Differentialgleichung für die Phase  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{M} \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) . \quad (3.3.5)$$

Das Geschwindigkeitsfeld ist also ein Gradientenfeld. Wenn die Phase zu allen Zeiten und an allen Raumpunkten stetig differenzierbar ist, weist das Geschwindigkeitsfeld keine Wirbel auf, da die Rotation eines solchen Gradientenfeldes verschwindet.

Die Bewegungsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld erhält man durch Einsetzen von (3.3.4) in die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.1.11). Der Imaginärteil der sich ergebenden Gleichung entspricht gerade der Kontinuitätsgleichung. Der Realteil liefert aber die gesuchte Bewegungsgleichung, die die Form einer Euler-Gleichung hat:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{M} \nabla \left[ U(\mathbf{x}) + gn(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2M} \frac{\nabla^2 \sqrt{n(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{n(\mathbf{x}, t)}} \right]. \quad (3.3.6)$$

Da (3.3.6) analog zur Euler-Gleichung der Hydrodynamik ist, legt dies die Interpretation der rechten Seite der Gleichung als Gradienten eines Druckes nahe. Dabei tritt neben dem Gradienten des Fallpotentials und der Wechselwirkung noch ein zusätzlicher Druckterm auf, der als Quantendruck bezeichnet wird.

Die hydrodynamische Bewegungsgleichung (3.3.6) bildet mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{x}, t) + \nabla [n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (3.3.7)$$

ein nichtlineares Differentialgleichungssystem für die Teilchendichte  $n(\mathbf{x}, t)$  und das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , das zur zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.1.11) äquivalent ist [11].

### 3.4 Linearisierte hydrodynamische Gleichungen in Thomas-Fermi-Näherung

In Abschnitt 3.2 wurde die Lösung der zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung (3.1.13) in Thomas-Fermi-Näherung, also unter Vernachlässigung der kinetischen Energie, als (3.2.6) bestimmt. Nun sollen die zur zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung äquivalenten Gleichungen (3.3.6) und (3.3.7) in Thomas-Fermi-Näherung betrachtet werden. In Thomas-Fermi-Näherung entfällt der Quantendruck und die Euler-Gleichung (3.3.6) reduziert sich auf:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{M} \nabla [U(\mathbf{x}) + gn(\mathbf{x}, t)]. \quad (3.4.1)$$

Die Gleichgewichtslösungen von (3.3.7) und (3.4.1) sind schon bekannt, da sie schon in Abschnitt 3.2 bestimmt wurden:

$$n_{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu - U(\mathbf{x})}{g}, \quad (3.4.2a)$$

$$\mathbf{v}_{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}. \quad (3.4.2b)$$

Nun werden Lösungen von (3.3.7) und (3.4.1) für schwache Anregungen gesucht. Man macht also eine lineare Stabilitätsanalyse um die Gleichgewichtslösungen (3.4.2a) und (3.4.2b):

$$n(\mathbf{x}, t) = n_{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) + \delta n(\mathbf{x}, t), \quad (3.4.3a)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{\text{eq}}(\mathbf{x}, t) + \delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.4.3b)$$

Die sich ergebenden Bewegungsgleichungen werden in den Abweichungen  $\delta n(\mathbf{x}, t)$  und  $\delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  linearisiert.

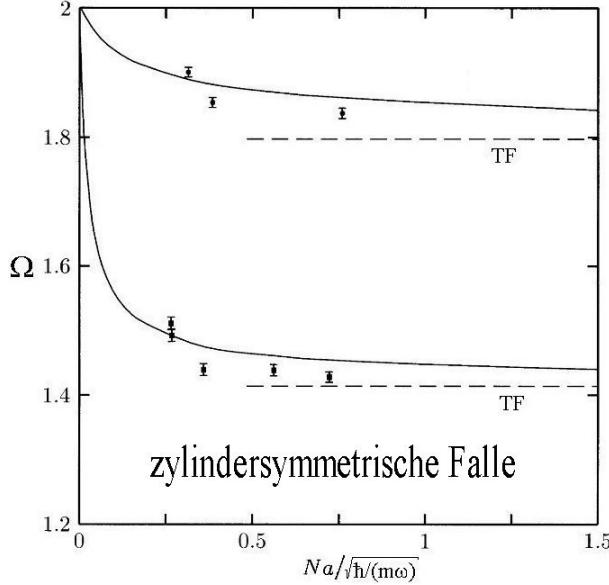


Abbildung 12: Abhängigkeit der Anregungsfrequenzen von  $Na$  für konkrete Sätze von Quantenzahlen und eine zylindersymmetrische Falle.

siert:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n(\mathbf{x}, t) = -\nabla \left[ \frac{\mu - U(\mathbf{x})}{g} \delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right], \quad (3.4.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{g}{M} \nabla \delta n(\mathbf{x}, t). \quad (3.4.4b)$$

Wendet man die partielle Zeitableitung auf (3.4.4a) an und verwendet man (3.4.4b), so lässt sich die Geschwindigkeit eliminieren. Die resultierende Bewegungsgleichung für die Abweichung der Kondensatdichte aus ihrem Gleichgewichtszustand lautet [11]:

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta n(\mathbf{x}, t) = [\mu - U(\mathbf{x})] \Delta \delta n(\mathbf{x}, t) - \nabla U(\mathbf{x}) \nabla \delta n(\mathbf{x}, t). \quad (3.4.5)$$

### 3.5 Elementare Anregungen

In diesem Abschnitt soll die Bewegungsgleichung (3.4.5) für die kollektiven Anregungen eines Bose-Einstein-Kondensats innerhalb einer isotropen harmonischen Falle  $V(r) = M\omega^2 r^2/2$  untersucht werden. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Fallenelements bieten sich Kugelkoordinaten an. Für eine zeitlich oszillierende Lösung

$$\delta n(\mathbf{x}, t) = \delta n(r, \vartheta, \varphi) e^{-i\Omega t} \quad (3.5.1)$$

lautet die Bewegungsgleichung:

$$\Omega^2 \delta n(r, \vartheta, \varphi) = \omega^2 r \frac{\partial \delta n(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} - \frac{\omega^2}{2} (R^2 - r^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2 \hbar^2} \right) \delta n(r, \vartheta, \varphi), \quad (3.5.2)$$

wobei die aus Abschnitt 3.2 folgende Beziehung  $M\omega^2 R^2/2 = \mu$  zwischen Thomas-Fermi-Radius  $R$  und chemischem Potential  $\mu$  benutzt wurde.  $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$  ist der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten.

Mit einer Reihe von Separationsansätzen und anderen Umformungen, die hier nicht gezeigt werden sollen, ergibt sich die Lösung zu [11]:

$$\delta n(r, \vartheta, \varphi, t) = r^l {}_2F_1\left(-n_r, l + n_r + \frac{3}{2}; l + \frac{3}{2}; \frac{r^2}{R^2}\right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) e^{-i\Omega_{n_r,l}t}. \quad (3.5.3)$$

dabei ist  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; u)$  die hypergeometrische Funktion, die durch

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{u^k}{k!} \quad (3.5.4)$$

definiert ist. Die Anregungsfrequenzen sind durch

$$\Omega_{n_r,l} = \omega \sqrt{2n_r^2 + 2n_r l + 3n_r + l} \quad (3.5.5)$$

gegeben. Man erhält also als Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung (3.4.5) quantisierte Schwingungen mit zwei unabhängigen Quantenzahlen  $n_r \in \mathbb{N}$  und  $l \in \mathbb{N}$ . Für  $n_r = l = 0$  schwingt das Kondensat mit der Frequenz der Falle, was als Kohn-Mode bezeichnet wird:  $\Omega_{00} = \omega$  [11].

Werden die hydrodynamischen Gleichungen ohne Vernachlässigung des Dichtegradienten numerisch oder mit anderen Approximationsmethoden gelöst, so findet man, dass die Anregungsfrequenzen zusätzlich zu den Quantenzahlen noch von der Wechselwirkung und der Teilchenzahl abhängen. In Abbildung 12 ist diese Abhängigkeit für eine zylindersymmetrische Falle dargestellt. Es sind dort zwei konkrete Sätze von Quantenzahlen ausgewählt. Für diese ergeben sich nach der Thomas-Fermi-Näherung feste Frequenzen  $\Omega_{n_r,l}$ . Man erkennt in Abbildung 12, dass diese gerade die Asymptoten für  $Na \rightarrow \infty$  sind, während sich für  $Na \rightarrow 0$ , also insbesondere für verschwindende Wechselwirkung  $a \rightarrow 0$ , die Anregungsfrequenzen  $\Omega_{nl}^{\text{Schr}} = \omega(2n + l)$  aus der Schrödinger-Theorie ergeben [10].

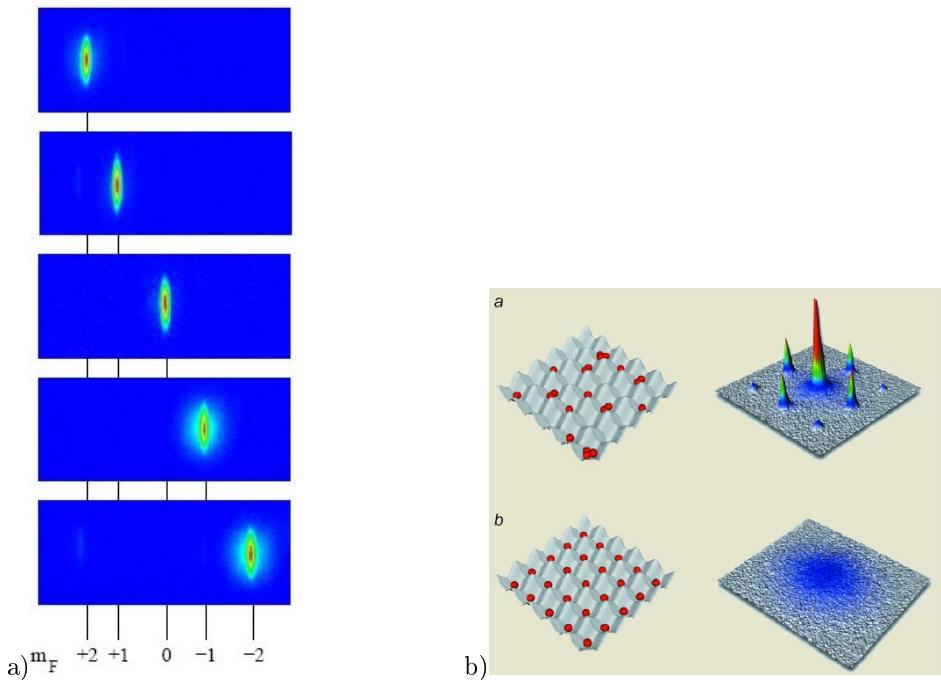


Abbildung 13: a) Aufnahmen zu einem Stern-Gerlach-Experiment mit einem Spinor-BEC. b) Schematische Darstellung eines Experiments mit einem Kondensat in einem optischen Gitter.

## 4 Ausblick

In diesem letzten Kapitel sollen vier aktuelle Gebiete zum Thema Bose-Einstein-Kondensation in kompakter Form vorgestellt werden.

Werden Teilchen in verschiedenen Hyperfeinzuständen so stark gekühlt, dass sie kondensieren, so spricht man von einem Spinor-BEC. Mit diesem kann man dann nach Auflösen der Falle Stern-Gerlach-Experimente in Magnetfeldern durchführen. Aufnahmen zu solchen Experimenten sind in Abbildung 13 a) dargestellt [12].

Man kann mit interferierenden Lasern periodische Potentiale erzeugen, so genannte optische Gitter, in denen Experimente mit Kondensaten durchgeführt werden können. Ein solches Experiment ist schematisch in Abbildung 13 b) dargestellt: Sind die Potentialmaxima zwischen den Potentialmulden von geringer Höhe, wie es im oberen Teil der Abbildung dargestellt ist, so ist es den Teilchen möglich, zwischen den Potentialmulden hin- und her zu tunnellen. In diesem Fall interferieren die Teilchen nach Auflösen des optischen Gitters und es ergeben sich Interferenzmuster, wie es in Abbildung 13 b) zu sehen ist. Sind dagegen die Potentialmaxima von einer solchen Höhe, dass die Teilchen in den Potentialmulden lokalisiert sind, so sind sie nach Abschalten des Gitters nicht mehr interferenzfähig [13].

Es können aber auch vollkommen unregelmäßige Potentiale, so genannte Unordnungspotentiale, mit Lasern erzeugt werden, in welchen dann wiederum Kondensate gefangen werden können. Eine Methode solche Unordnungspotentiale herzustellen ist in Abbildung 14 a) dargestellt: Der Laserstrahl transmittiert durch eine Platte, welche die Eigenschaft hat das Licht diffus zu machen. Auf diese Weise wird aus dem periodischen Potential, erzeugt durch das Laserlicht, ein Unordnungspotential [14].

In fermionischen Systemen ist es möglich, die s-Wellen-Streulänge, die ja die Stoßwechselwirkung

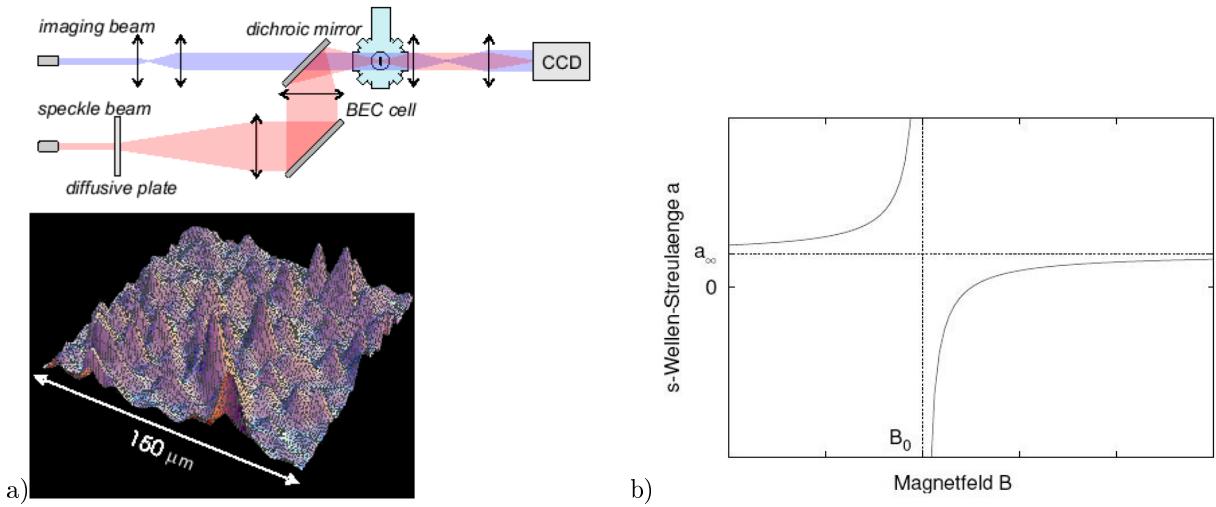


Abbildung 14: a) Erzeugung eines Unordnungspotential mit einer diffusen Platte. b) BEC/BCS-Crossover durch ein äußeres Magnetfeld.

bestimmt, durch Anlegen eines äußeren Magnetfeldes zu verändern. Diese kann sogar so beeinflusst werden, dass sie von positiven zu negativen Werten übergeht, wie es in Abbildung 14 b) zu sehen ist. Es ist also möglich, von repulsiver zu attraktiver Wechselwirkung überzugehen. Ist die Wechselwirkung repulsiv, so sind die Fermionen im Ortsraum von einander getrennt und sie können Cooper-Paare bilden. Ist die Wechselwirkung attraktiv, so bilden die Fermionen bosonische Moleküle, welche dann zu einem BEC kondensieren können. Man spricht bei diesem Übergang von repulsiver zu attraktiver Wechselwirkung vom BEC/BCS-Crossover [15].

## Literatur

- [1] URL: <http://nobelprize.org/>, Stand: 19.02.2006
- [2] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantenmechanik 1* und *Quantenmechanik 2*, 2. Auflage (Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1999)
- [3] W. Greiner, J. Reinhardt, *Feldquantisierung*, 1. Auflage (Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993)
- [4] Wikipedia, *Laserkühlung*, Stand: 19.02.2006, URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Laserk%C3%B6hlung>
- [5] M. Stier, *Messung räumlicher Kohärenz eines gefangenen Bosegases im Bereich des Phasenübergangs*, URL: [http://quantendynamik.physik.uni-freiburg.de/teaching/ss03/ss03\\_seminar/BEC.pdf](http://quantendynamik.physik.uni-freiburg.de/teaching/ss03/ss03_seminar/BEC.pdf)
- [6] Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 6: Statistische Physik*, 5. Auflage (Springer, Berlin, 2004)
- [7] F. Schwabl, *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*, 4. Auflage (Springer, Berlin, 2005)
- [8] G. Grawert, *Quantenmechanik*, 2. Auflage (Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1973)
- [9] S. Kling, *Rotating Bose-Einstein Condensates*, Diplomarbeit (Freie Universität Berlin, 2005)
- [10] L. Pitaevskii, S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003)
- [11] A. Pelster, *Bose-Einstein-Kondensation*, Vorlesungsskript (Universität Duisburg-Essen, 2004), URL: [http://www.theo-phys.uni-essen.de/tp/ags/pelster\\_dir/SS04/skript.pdf](http://www.theo-phys.uni-essen.de/tp/ags/pelster_dir/SS04/skript.pdf)
- [12] H. Schmaljohann, *Spindynamik in Bose-Einstein Kondensaten*, Dissertation (Hamburg, 2004)
- [13] I. Bloch, *Quantum gases in optical lattices*, Physics world (April 2004)
- [14] J. E. Lye, L. Fallani, M. Modugno, D.S. Wiersma, C. Fort, M. Inguscio, *Bose-Einstein Condensate in a Random Potential*, Phys. Rev. Lett. 95:070401 (2005)
- [15] A. Marte, *Feshbach-Resonanzen bei Stößen ultrakalter Rubidiumatome*, Dissertation (Technische Universität München, Max-Planck-Institut für Quantenoptik, 2003)