DIE DIRAC-GLEICHUNG IN GEKRÜMMTER RAUMZEIT



Bachelorarbeit

im Fachbereich Physik

vorgelegt von:	Raphael Schlattmann
Studienfach:	Physik
Matrikelnummer:	4140730
1. Betreuer:	Dr. Thoralf Chrobok
	(Technische Universität Berlin)
2. Betreuer:	PrivDoz. Dr. Axel Pelster

28. Oktober 2010

Ich versichere, die Bachelorarbeit selbständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.

Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

Berlin, den 28. Oktober 2010

(Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung			
2	Koo	rdinatenunabhängige Basen	3	
	2.1	Konstruktion von Tetraden	4	
	2.2	Tetradenbeziehungen und die Lorentz-Gruppe	5	
	2.3	Spin-Zusammenhang und kovariante Ableitung	6	
3	Spin	loren	9	
	3.1	Lorentz- und Poincaré-Gruppe	10	
	3.2	Definition eines 2-komponentigen Spinors	11	
	3.3	Clifford- und Lie-Algebra	12	
		3.3.1 Lie-Algebra	12	
		3.3.2 Clifford-Algebra	14	
		3.3.3 Beispiele für Clifford-Algebren	14	
		3.3.4 Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ und $\mathfrak{so}(n)$	16	
	3.4	Spin-Gruppe	18	
		3.4.1 $SO(3)$ und $SU(2)$	18	
		3.4.2 Definition über die Clifford-Unteralgebra $Cl^{0}(V)$	18	
	3.5	$SL(2,\mathbb{C})$ und die Lorentz-Gruppe	19	
		3.5.1 Die linke und die rechte Fundamentaldarstellung	21	
4 C	Die	Dirac-Gleichung	25	
	4.1	Die Dirac-Gleichung im Minkowski-Raum	25	
	4.2	Die Dirac-Gleichung in gekrümmter Raumzeit	28	
		4.2.1 Das Dirac-Spinor-Bündel	29	
		4.2.2 Der Spin-Zusammenhang	30	
		4.2.3 Der Dirac-Operator in gekrümmter Raumzeit	32	
5	Zusa	ammenfassung und Ausblick	35	
6	۸nh	ang A	27	
0	6 1	Ang A Kartan Atlantan Manniafaltiakaitan	37	
	6.9	Der Tengentielreum	- 37	
	0.4 6.3		40	
	0.0 6.4	Die koveniente Ableitung	42 45	
	0.4 6 เม	Die Kovaname Ableitung	40 47	
	0.0	raramentransport und Krummung	47	
Lit	iteraturverzeichnis			

1 Einleitung

Die Geometrisierung der Raumzeitstruktur durch die allgemeine Relativitätstheorie (ART) revolutionierte die Vorstellung des bis dato noch von Newton geprägten Bildes der Gravitation. Insbesondere bezüglich der parallel und kurz darauf entwickelten Quantentheorie, ging diese Revolution jedoch nicht weit genug. Da die Gravitation eine der fundamentalen Wechselwirkungen in der Physik darstellt, findet dieser Umstand Ausdruck in der Abwesenheit des Gravitationsphänomens in der heute etablierten Quantenfeldtheorie (QFT). Alle physikalischen Felder werden ab einer bestimmten Größenordnung durch die Prinzipien der QFT beschrieben. Ist der Zustand eines Systems kein Eigenwert des relevanten Operators, gibt es keinen festen Wert für die durch ihn beschriebene Observable, sondern einzig eine Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses. Die ART ist hingegen eine klassische Theorie und die betrachteten Quantitäten, wie z.B. die der Metrik, nehmen immer eindeutig determinierte Werte an. Sollen die Aussagen der Quantentheorie auch für das Gravitationsfeld zutreffen, kann die ART somit nur Grenzfall einer grundlegenderen Theorie sein. Ein erster Schritt zu einer Quantentheorie der Gravitation besteht dann darin, die QFT auf gekrümmte Raumzeiten zu verallgemeinern. Dort tritt die Gravitation nur als klassisches Hintergrundfeld auf und wird zunächst nicht quantisiert, also von keiner Rückwirkung der quantisierten Felder beeinflusst. Diese Näherung ist insofern sinnvoll, als dass die quantengravitativen Effekte erst in Größenordnungen der Planck-Länge $(10^{-33} cm)$ eine Rolle spielen, wohingegen die gewöhnliche Wirkungsskala der QFT ($\geq 10^{-17} cm$) um ein Vielfaches größer ist. Damit zählen Umgebungen wie die des frühen Universums und die schwarzer Löcher zu den potentiellen Anwendungsgebieten. Obwohl in den letzten Jahrzehnten auch einige andere vielversprechende Ansätze, wie z.B. die Quantenloopgravitation oder die Stringtheorie, stark verfolgt wurden und werden, kann die Untersuchung einer semiklassischen Theorie als Grenzfall wichtige Erkenntnisse liefern.

Die Implementierung der speziell relativistischen, quantenmechanischen Gleichungen in gekrümmter Raumzeit ist hierbei Ausgangspunkt. Die Dirac-Gleichung nimmt dabei im historischen sowie aktuellen Kontext eine maßgebliche Rolle ein, da die um sie aufgebaute Dirac-Theorie die relativistische Weiterentwicklung der klassischen Quantemechanik darstellt und sie somit auch zentraler Bestandteil einer Quantenfeldtheorie in gekrümmter Raumzeit ist. Obwohl die so aufgebaute Theorie im besten Fall nur die Näherung einer evtl. vorhandenen, rigoroseren Formulierung darstellt, können die durch sie vorhergesagten Effekte Aufschluss über zu erwartende Quantenphänomene in starken Gravitationsfeldern geben. Konkrekt wurde mit der Methode z.B. die Hawking-Strahlung postuliert, welche auch aktueller Forschungsgegenstand ist. Wird ein schwarzes Loch betrachtet, emittiert dieses bei Teilchenerzeugung, laut Postulat, ein thermisches Spektrum von Teilchen mit der Temperatur $kT = \hbar \kappa/2\pi$, wobei κ für die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche des schwarzen Loches steht. Als Folge des enormen Verlusts von potenzieller Energie nimmt die Masse des Schwarzen Loches dabei ab. In einem im September 2010 veröffentlichten Paper wurde zum ersten Mal der experimentelle Nachweis der Hawking-Strahlung behauptet [1].

In dieser Arbeit werden die Grundlagen für eine Einführung von Spin-(1/2) Teilchen (nicht Feldern) in gekrümmter Raumzeit gegeben. Es sollen daher nur die relevanten Konzepte zur Herleitung einer allgemein kovarianten Dirac-Gleichung Erwähnung finden, eine Untersuchung der Gleichung für spezielle Metriken würde den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen. Besonderes Augenmerk wird auf die darstellungstheoretische Entwicklung von Spinoren gelegt, da hierdurch die auftretenden Probleme bei der Vereinigung von ART und Quantentheorie verdeutlicht werden. Auf die Notation wird zu Beginn des jeweiligen Kapitels eingegangen. Eine Wiederholung der allgemein relativistischen Differentialgeometrie erfolgt in Anhang A.

2 Koordinatenunabhängige Basen

Wie in Anhang A erläutert, werden Tangentialräume zu Punkten P der Mannigfaltigkeit M in der klassischen ART durch koordinatenabhängige Basen beschrieben. Es ist allerdings möglich, auch koordinatenunabhängige Basen an jedem beliebigen Punkt der Mannigfaltigkeit einzuführen. Es wird sich herausstellen, dass diese geringfügige Änderung einen alternativen Blick auf die schon eingeführten Begriffe des Zusammenhangs und der Krümmung erlaubt, für die Einführung von Spinoren bzw. des Spin-Zusammenhangs essentiell ist und auch deren Verbindung zu den Eichtheorien der Elementarteilchenphysik verdeutlicht.

Beim Wechsel einer Koordinatenbasis x^{μ} in eine andere Basis $x^{\mu'}$, transformiert sich das Vektorfeld X^{μ} über:

$$X^{\mu} \to X^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} X^{\mu}, \quad \text{mit} \quad Z = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}.$$
 (2.0.1)

Die Matrix Z ist dabei ein Element der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$, der Gruppe der reellen $n \times n$ Matrizen. Der Vektor X^{μ} transformiert in der fundamentalen Vektordarstellung dieser Gruppe. Die elementarsten Formulierungen der ART zur Koppelung von Gravitation an Materiefelder stellen an letztere die Forderung, eine Darstellung von $GL(n, \mathbb{R})$ zu bilden. Unter Koordinatenwechsel transformiert sich ein physikalisches Feld in einer $GL(n, \mathbb{R})$ -Darstellung über die, in dieser Darstellung wirkende, Matrix (2.0.1). Die in Anhang A diskutierten Tensoren bilden eine solche Darstellung von $GL(n, \mathbb{R})$, durch welche auch eine Darstellung der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(n)^1$ induziert wird, da SO(n) eine Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$ ist. Die Umkehrung stimmt hingegen nicht. Ein Beispiel dafür sind die später einzuführenden Spinoren, welche zwar eine Darstellung von SO(n), jedoch keine von $GL(n, \mathbb{R})$ bilden. Um Spinoren also an Gravitation zu koppeln, wird ein modifizierter Rahmen benötigt, in dem die Z-Matrix durch eine SO(n) bzw. SO(1, n-1) Matrix (signaturabhängig) ersetzt wird. Ein notwendiger Schritt ist daher zunächst die Einführung sogenannter n-Beine oder Tetraden.

Bisher wurde eine natürliche Basis des Tangentialraums M_p am Punkt $P \in M$ durch die partiellen Richtungableitungen bezüglich der Koordinaten an diesem Punkt $\{\hat{e}_{(\mu)} = \partial_{\mu}|_p\}_{\mu=1,...,n}$ gegeben. Genauso existiert eine Basis des Dualraums M_p^* , gebildet durch die Linearformen der Koordinatenfunktionen $\{\hat{\theta}^{(\mu)} = dx^{\mu}|_p\}_{\mu=1,...,n}$. Es können nun einfach an jedem Punkt Basisvektorfelder $\{\hat{e}_{(a)}\}_{a=1,...,n}$ mit einer zusätzlichen Forderung nach Orthonormalität eingeführt werden. Ist die kanonische Form der Metrik η_{ab} , ergibt sich das innere Produkt der Basisvektorfelder zu

$$g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab}.$$
 (2.0.2)

Dabei stellt g(,) den allgemeinen metrischen Tensor und $\eta_{ab} = diag(1, -1, -1, -1)$ im Falle einer Raumzeit² die Minkowski-Metrik dar. Anschaulich wird also jedem Ereignis der Raumzeit ein Bezugssystem zugeordnet, das im einfachsten Fall aus drei orthogonalen Normalmaßstäben und einer Normaluhr besteht. In diesem können dann beliebige Koordinatensysteme gewählt werden [2]. Oben Gesagtes soll nun zusammengefasst werden.

 $_1$ Die Gruppe aller Drehungen (orthogonale Matrizen mit Determinante+1) 2raum- und zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit

2.1 Konstruktion von Tetraden

Definition 2.1.1 Ein n-Tupel $(\hat{e}_{(a)}, \ldots, \hat{e}_{(n)})$ von Vektorfeldern auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ heißt Rahmen, Basis oder n-Bein auf U, falls die Elemente des Tupels in jedem Tangentialraum linear unabhängig sind. Gilt sogar $g(\hat{e}_{(a)}, \hat{e}_{(b)}) = \eta_{ab}$, so heißt $(\hat{e}_{(a)}, \ldots, \hat{e}_{(n)})$ pseudoorthonormal-Repère. $\eta_{ab} = \eta^{ab} = diag(1, -1, -1, -1)$ sind dabei die Komponenten einer Normalform von g. Für den Fall n = 4 wird ein pseudo-orthonormal-Repère auch Tetrade genannt.

Das üblicherweise in der physikalischen Anwendung auftretende Ricci-Kalkül birgt eine große Menge an kontra bzw. kovarianten Indizes in sich, deren Handhabung in langen Rechnungen und Koordinatentransformationen oft schlecht überschaubar ist. Die Einführung von Tetraden erschwert dies noch zusätzlich, da nun auch noch zwischen koordinatenabhängigen und koordinatenunabhängigen Objekten unterschieden werden muss. Im Anhang A wurden, in unüblicher Weise, durchgehend alle Indizes mit kleinen lateinischen Buchstaben aus der Mitte des Alphabets geschrieben. Daher sei an dieser Stelle nocheinmal auf die von hieran verwendete Notation verwiesen. Koordinatenunabhängige Tetraden-Indizes werden mit kleinen lateinischen Buchstaben a, b, \ldots versehen und laufen von 0 bis 3, koordinatenabhängige mit kleinen griechischen μ, ν, \ldots . Um zusätzlich die Vektoren der Tetradenbasis zu markieren, werden deren Indizes geklammert dargestellt. Da die Vektoren einer Tetrade nicht unbedingt tangential an den Koordinatenfunktionen liegen müssen, werden sie auch anholonom genannt.

Sinn einer Basis ist es, jeden Vektor als Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken zu können. Speziell lassen sich die Vektoren $\hat{e}_{(a)}$ in der holonomen Basis $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_{\mu}$ darstellen durch:

$$\hat{e}_{(\mu)}(x) = e_{\mu}{}^{a}(x)\hat{e}_{(a)}. \qquad (2.1.1)$$

Die Komponenten $e_{\mu}{}^{a}$ bilden eine invertierbare $n \times n$ Matrix¹: Die Inversen werden durch vertauschen der Indizes gekennzeichnet und die Matrizen erfüllen dann die Beziehungen

$$e^{\mu}_{\ a}e^{\ a}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}, \qquad e^{\ a}_{\mu}e^{\mu}_{\ b}=\delta^{a}_{b}.$$
 (2.1.2)

Außerdem dienen sie als Komponenten des Vektors $\hat{e}_{(a)}$ in der Koordinatenbasis:

$$\hat{e}_{(a)} = e^{\mu}{}_{a}(x)\hat{e}_{(\mu)}. \qquad (2.1.3)$$

In Tetradendarstellung wird aus (2.0.2):

$$g_{\mu\nu}e^{\mu}{}_{a}e^{\nu}{}_{b} = \eta_{ab}$$
 bzw. $g_{\mu\nu} = e_{\mu}{}^{a}e_{\nu}{}^{b}\eta_{ab}$. (2.1.4)

Gleichzeitig kann eine Basis von Linearformen $\hat{\theta}^{(a)}$, gekoppelt durch

$$\hat{\theta}^{(a)}(\hat{e}_{(b)}) = \delta^a_b,$$
 (2.1.5)

des Dualraums M_p^* gefunden werden, welche auch über die Tetradenfelder in der Koordinatenabhängigen Basis $\hat{\theta}^{(\mu)} = dx^{\mu}$ darstellbar ist:

$$\hat{\theta}^{(\mu)} = e^{\mu}{}_{a}\hat{\theta}^{(a)} \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{\theta}^{(a)} = e_{\mu}{}^{a}\hat{\theta}^{(\mu)} \,. \tag{2.1.6}$$

Ein Vergleich mit (2.1.1) und (2.1.3) zeigt, dass sich die Tetradenfelder als Transformationsmatrizen der Linearformen genau umgekehrt zu denen der orthormalen Basisvektoren verhalten. So kann jeder beliebige Vektor bzw. Tensor in der jeweils anderen Basis ausgedrückt werden. Für Vektorfelder $X^{\mu}\hat{e}_{(\mu)}$ und $X^{a}\hat{e}_{(a)}$ ergibt sich das Transformationsgesetz dann zu:

$$X^a = e_{\mu}{}^a X^{\mu} \,. \tag{2.1.7}$$

₁Wie schon bei den Zusammenhängen, werden auch hier die Komponenten $e_{\mu}^{\ a}$ selbst Tetraden-, oder *n*-Bein-Felder genannt.

Höherstufige Tensoren können in der holonomen, anholonomen oder sogar gemischten Basis dargestellt werden:

$$T^{a}_{\ b} = e_{\mu}^{\ a} T^{\mu}_{\ b} = e^{\nu}_{\ b} T^{a}_{\ \nu} = e^{a}_{\mu} e^{\nu}_{\ b} T^{\mu}_{\ \nu} .$$
(2.1.8)

Wie die Beziehungen (2.1.4) zeigen, sind die Komponenten des metrischen Tensors in der anholonomen Basis einfach die der flachen Metrik η_{ab} . Mit ihrer Inversen η^{ab} können dann Indizes beliebig herauf- und heruntergezogen werden und mit (2.1.4) ergibt sich:

$$e^{\mu}{}_{a} = g^{\mu\nu}\eta_{ab}e_{\nu}{}^{b}. \tag{2.1.9}$$

Die Tetraden wurden als Komponenten einer Menge von Basisvektoren, ausgewertet in einer anderen Basis, eingeführt. Damit verhalten sie sich genauso wie Komponenten eines (1, 1)-Tensors,

$$e = e_{\nu}^{\ a} dx^{\nu} \otimes \hat{e}_{(a)} \,. \tag{2.1.10}$$

Dies ist aber ein bekannter Tensor: die Identität. Sie gibt bei Anwendung auf einen Vektor wieder denselben, in einer anderen Basis dargestellten, Vektor (siehe (2.1.7)). Desweiteren ist auch das Kronecker-Delta, also (2.1.2), die Identität, da mit ihm ja das Skalarprodukt orthonormierter Vektoren (oder Linearformen) geschrieben werden kann. Zudem gibt diese Sichtweise die Möglichkeit, diverse Tensoren als tensorwertige Differentialformen anzusehen. Das Objekt X_{ν}^{a} kann so auch als "vektorwertige Linearform" interpretiert werden. Es hat einen unteren Koordinatenindex, der für eine Linearform steht, ist aber für jeden Wert dieses Eintrags ein Vektor. Da die Indizes von Differentialformen unterdrückt werden können, lassen sie sich über die Basis-Linearformen schreiben:

$$e^{a} = e_{\nu}^{\ a} dx \,. \tag{2.1.11}$$

Die hier gewonnenen Aussagen werden später noch Anwendung finden. Zunächst soll jedoch die Beziehung der Tetraden untereinander beleuchtet werden.

2.2 Tetradenbeziehungen und die Lorentz-Gruppe

Die Einführung neuer Basisvektorfelder und Linearformen führt zwangsläufig auf deren Transformationsverhalten. Das Tensortransformationsgesetz (6.3.7) in Anhang A ergibt sich als ein indirektes Ergebnis von Koordinatentransformationen, obwohl der eigentliche Kernpunkt ein allgemeiner Basiswechsel war. Da nun koordinatenunabhängige Basen eingeführt sind, können diese auch ohne eine explizite Wahl von Koordinaten gewechselt werden. Die einzige Bedingung ist die Erhaltung der Orthonormalität (2.0.2). Welche Transformationen erhalten also eine Metrik des flachen Raumes? Im Euklidischen Raum mit entsprechender Metrik sind dies orthogonale Transformationen, für eine Metrik mit Lorentzsignatur die Lorentztransformationen. Ein Basiswechsel ist dann von der Form:

$$\hat{e}_{(a)} \to \hat{e}_{(a')} = \Lambda^a{}_{a'}(x)\hat{e}_{(a)},$$
(2.2.1)

wobei die Matrizen $\Lambda^{a}_{a'}(x)$ ortsabhängige Transformationen darstellen und die kanonische From der Metrik (an jedem Punkt) invariant lassen:

$$\Lambda^a{}_{a'}\Lambda^b{}_{b'}\eta_{ab} = \eta_{a'b'}. \qquad (2.2.2)$$

Diese Matrizen korrespondieren eigentlich zu den inversen Lorentztransformationen, die auf Basisvektoren wirken, denn die ursprünglichen Lorentztransformationen $\Lambda^{a'}{}_{a}$ transformieren Basislinearformen. Die Menge \mathcal{L} der (2.2.2) erfüllenden Matrizen bildet die Lorentz-Gruppe. Die beiden zusätzlichen Bedingungen

$$\Lambda^0_{\ 0} > 0 \qquad \text{und} \qquad det(\Lambda) = 1 \tag{2.2.3}$$

implizieren, dass zukunftsweisende, zeitartige Vektoren zukunftsweisend bleiben und rechtshändige Rahmen nicht auf linkshändige abgebildet werden. Die Menge der Lorentztransformationen welche die Bedingungen (2.2.3) erfüllen, wird **eigentliche-orthochrone Lorentz-Gruppe** genannt und mit L^{\uparrow}_{+} oder in üblicher Gruppennotation mit SO(1,3) bezeichnet. Die oben besprochene Z-Matrix (2.0.1) wird also durch die Lorentztransformationen ersetzt. Im folgenden Kapitel werden beide Gruppen ausführlicher behandelt.

Es ist nun also möglich, an jedem Punkt der Raumzeit sogenannte *lokale Lorentztransformationen* (LLT's) (oder einfache euklidische Rotationen) vorzunehmen. Da natürlich auch immer noch die *allgemeinen Koordinatentransformationen* (GCT's) durchgeführt werden können, entsteht ein neues, gemischtes Tensortransformationsgesetz:

$$T^{a',\dots,\mu'}_{b',\dots,\nu'} = \Lambda^{a'}_{\ a}\dots\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}\Lambda^{b}_{\ b'}\dots\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}}T^{a,\dots,\mu}_{\ b,\dots,\nu}.$$
(2.2.4)

Zur "Übersetzung" von Tensoren in koordinatenunabhängige Basen, müssen also einfach nur Tetradenfelder an den richtigen Stellen eingesetzt werden.

2.3 Spin-Zusammenhang und kovariante Ableitung

Im üblichen Formalismus der ART ist es notwendig, zur Differentiation eine Ableitung einzuführen, die kovariant unter Diffeomorphismen ist. Diese ergibt sich für die jeweiligen Tensoreinträge aus den partiellen Ableitungen plus Korrekturtermen, den Zusammenhangskoeffizienten. Da die allgemeine lineare Gruppe $GL(4, \mathbb{R})$ keine endlich-dimensionale Spinordarstellung besitzt, erfordert die Behandlung von Spinorfeldern in gekrümmter Raumzeit, wie oben schon erwähnt, Tetraden mit lokaler SO(1,3) Symmetrie. Ein Spin-Zusammenhang ist dann ein Zusammenhang auf dem durch die Tetraden gebildeten orthonormalen Bündel¹, welcher kovariant sowohl bezüglich Diffeomorphismen, als auch lokaler Lorentztransformationen ist. Denn die neue Ableitung, wie auch der gesamte Tetraden-Formalismus, sollen ja gerade invariant unter LLT's sein, sodass physikalische Observablen unabhängig von der Wahl der jeweiligen *n*-Beine sind. Dies hört sich stark nach einer Eichtheorie an. Dann kann der Spin-Zusammenhang auch als Eich-Feld eingeführt werden, um die lokale Lorentz-Invarianz zu gewährleisten. Das Eich-Feld $\omega_{\mu \ b}^{a} - \Lambda^{c}_{\ b'}\partial_{\mu}\Lambda^{a'}_{\ c}$ oder bei Unterdrückung der Tetradenindizes:

$$\omega_{\mu} \to \Lambda \left(\partial_{\mu} + \omega_{\mu}\right) \Lambda^{-1} \,. \tag{2.3.1}$$

Es soll eine möglichst minimale Wahl von Eigenschaften des Spin-Zusammenhanges erfolgen, so dass dessen Einführung die Aussagen der ART in holonomer Formulierung nicht verändert. Dazu zunächst einige Vorbetrachtungen. Für ein Vektorfeld \boldsymbol{X} gilt:

$$X^a \to X^{a'} = \Lambda^{a'}{}_a X^a \quad \text{und} \quad \nabla_\mu X^a \to \nabla'_\mu X^{a'} = \nabla'_\mu (\Lambda^{a'}{}_a X^a) \stackrel{!}{=} \Lambda^{a'}{}_a (\nabla_\mu X^a) \,. \tag{2.3.2}$$

Daraus folgt:

$$\nabla'_{\mu} = \Lambda^{a'}{}_{a} \nabla_{\mu} \Lambda_{a'}{}^{a} \qquad \text{bzw.} \qquad \nabla'_{\mu} = \Lambda \nabla_{\mu} \Lambda^{-1} \,. \tag{2.3.3}$$

Der Spin-Zusammenhang² wird also mit ω bezeichnet und erhält analog zu den Christoffel-Symbolen für jeden lateinischen Index bei kovarianter Ableitung einen zusätzlichen Faktor des Zusammenhangs. Die kovariante Ableitung eines (1, 1)-Tensors schreibt sich somit:

$$\nabla_{\mu}T^{a}_{\ b} = T^{a}_{\ b;\mu} = T^{a}_{\ b,\mu} + \omega_{\mu}{}^{a}_{\ c}T^{c}_{\ b} - \omega_{\mu}{}^{c}_{\ b}T^{a}_{\ c} .$$
(2.3.4)

Die Forderung an Tensoren unabhängig von der gewählten Basis darstellbar zu sein erlaubt es, eine Beziehung zwischen dem Spin-Zusammenhang, den Tetraden und den Christoffelsymbolen

 $_1 {\rm Analog\ zum\ Tangentialbündel},$ die disjunkte Vereinigung aller Tetraden auf M.

 $_2$ Auch hier sind es eigentlich nur die Koeffizienten, die sprachlich aber mit dem Zusammenhang gleichgesetzt werden.

herzustellen. Dazu wird zunächst die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes \boldsymbol{X} in einer Koordinatenbasis gebildet:

$$\nabla \boldsymbol{X} = (X^{\nu}{}_{;\mu})dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}$$

= $(X^{\nu}{}_{,\mu} + \Gamma^{\nu}{}_{\mu\lambda}X^{\lambda})dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}.$ (2.3.5)

Dasselbe Objekt (2.3.5) in einer gemischten Basis soll nun in eine Koordinatenbasis überführt werden:

$$\nabla \boldsymbol{X} = (X^{a}_{;\,\mu})dx^{\mu} \otimes \hat{e}_{(a)}$$

$$= (X^{a}_{,\,\mu} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}X^{b})dx^{\mu} \otimes \hat{e}_{(a)}$$

$$= ((e_{\nu}{}^{a}X^{\nu})_{,\,\mu} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}e_{\lambda}{}^{b}X^{\lambda})dx^{\mu} \otimes (e^{\sigma}{}_{a}\partial_{\sigma})$$

$$= e^{\sigma}{}_{a}(e_{\nu}{}^{a}X^{\nu}{}_{,\,\mu} + X^{\nu}e_{\nu}{}^{a}{}_{,\,\mu} + \omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}e_{\lambda}{}^{b}X^{\lambda})dx^{\mu} \otimes \partial_{\sigma}$$

$$= (X^{\nu}{}_{,\,\mu} + e^{\nu}{}_{a}e_{\lambda}{}^{a}{}_{,\,\mu}X^{\lambda} + e^{\nu}{}_{a}e_{\lambda}{}^{b}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b}X^{\lambda})dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu}. \qquad (2.3.6)$$

Ein Vergleich mit (2.3.5) ergibt:

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} = e^{\nu}{}_{a}e_{\lambda}{}^{a}{}_{,\,\mu} + e^{\nu}{}_{a}e_{\lambda}{}^{b}\omega_{\mu}{}^{a}{}_{b} \tag{2.3.7}$$

oder nach ω umgestellt

$$\omega_{\mu \ b}^{\ a} = e_{\nu}^{\ a} e^{\lambda}{}_{b} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - e^{\lambda}{}_{b} e^{\lambda}{}_{\lambda}{}^{a}{}_{,\mu} \,. \tag{2.3.8}$$

Durch Multiplikation von rechts mit $e_{\nu}^{\ b}$ und unter Verwendung von (2.1.2), verschwindet die kovariante Ableitung der Tetraden:

$$\nabla_{\mu}e_{\nu}^{\ a} = e_{\nu}^{\ a}_{\ ; \, \mu} = e_{\nu}^{\ a}_{\ , \, \mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}e_{\lambda}^{\ a} + \omega_{\mu}^{\ a}{}_{\ b}e_{\nu}^{\ b} = 0.$$
(2.3.9)

Dieses Ergebnis befriedigt aber genau die oben gestellte Bedingung nach Äquivalenz der holonomen und anholonomen kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes \boldsymbol{X} , welche forderte, dass die Aussagen der ART bei Verwendung von Tetraden nicht modifiziert werden. Denn für $e_{\nu}{}^{a}{}_{;\mu} = 0$ gilt mit der Kettenregel ja einfach:

$$X^{a}_{;\,\mu} = (e_{\nu}^{\ a}X^{\nu})_{;\,\mu} = \underbrace{e_{\nu}^{\ a}_{;\,\mu}X^{\nu}}_{=0} + e_{\nu}^{\ a}X^{\nu}_{;\,\mu} = e_{\nu}^{\ a}X^{\nu}_{;\,\mu} , \qquad (2.3.10)$$

in der Literatur [4], [5] auch als "Tetraden-Postulat" bezeichnet. Zu bemerken ist, dass (2.3.9) immer gilt, da zur Einführung von ω keine Bedingungen an den Zusammenhang selbst gestellt wurden¹. Speziell sind weder Torsionfreiheit (D5), noch Metrikkompatibilität (D4) gefordert, die obigen Gleichungen gelten demnach für beliebige Zusammenhänge. Bei einer Wahl des Levi-Civita-Zusammenhangs treten sowohl (D4), als auch (D5) in Kraft, dabei wird Metrikkompatibilität über das Verschwinden der kovarianten Ableitung des metrischen Tensors ausgedrückt: $\nabla g = 0$. In der orthonormalen Basis sind die Komponenten der Metrik aber gerade die der Minkowski-Metrik η_{ab} . Dann gilt:

$$\nabla_{\mu}\eta_{ab} = \eta_{ab\,;\,\mu} = \eta_{ab\,,\,\mu} - \omega_{\mu\,a}^{\ c} \eta_{cb} - \omega_{\mu\,b}^{\ c} \eta_{ac}
= -\omega_{\mu ab} - \omega_{\mu ba} = 0
\Rightarrow \omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba} .$$
(2.3.11)

Für einen metrikkompatiblen Zusammenhang ist ω also antisymmetrisch. Wenn nun zusätzlich noch Relation (2.1.11) benutzt wird, ergeben sich die Linearformen des Spin-Zusammenhangs, auch Zusammenhangsformen genannt, zu:

$$\omega^a_{\ b} = \omega^{\ a}_{\mu\ b} dx^\mu \tag{2.3.12}$$

¹Die Äquivalenz der holonomen und anholonomen kovarianten Ableitung ergab sich ohne konkrete Forderung an den Zusammenhang

und für die einzelnen Komponenten gilt dann $\omega_0^1 = \omega_{10} = -\omega_{01} = \omega_1^0$ usw.. Wegen Antisymmetrie verschwinden die Diagonaleinträge und es ergibt sich in Matrixform:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$
 (2.3.13)

Im folgenden Kapitel wird das Konzept des Spin-Zusammenhangs im Kontext von Spin-Stuktur und Erzeugenden der Lorentz-Algebra weiter vertieft. Auch die restlichen Objekte der ART wie Krümmungs- und Torsionstensor und natürlich die einsteinschen Feldgleichungen selbst, lassen sich im Tetradenformalismus schreiben und werden vor allem durch den, die Nulltetraden einführenden, sogenannten *Newman-Penrose-Formalismus* teils erheblich vereinfacht. Da dieser für die Einführung von Spin-(1/2) Teilchen über gekrümmten Raumzeiten jedoch nicht erforderlich ist, wird im Weiteren auch nicht darauf eingegangen.

3 Spinoren

Die Theorie der Spinoren wurde zu Beginn des 20. Jahrhunderts entwickelt und spielt in der Quantentheorie und somit in der gesamten gegenwärtigen Physik eine wichtige Rolle. Élie Cartan [6] führte einen allgemeinen Spinorbegriff ein, während van der Waerden den Kalkül der zweikomponentigen Spin-Vektoren entwickelte. Dirac entdeckte ihre fundamentale Bedeutung für die relativistische Physik, als er die in dieser Arbeit behandelte Gleichung für das Elektron fand. Mit der Arbeit von Penrose [7] wurde der Spinor-Kalkül in die Allgemeine Relativitätstheorie eingeführt und der darauf beruhende Newman-Penrose (NP) Formalismus bis heute sehr erfolgreich in den verschiedensten Teilgebieten der Gravitationstheorie angewandt.

In der klassischen Geometrie des Raumes weist ein Vektor bei Rotation oder Reflektion an einer Hyperebene ein bestimmtes Verhalten auf welches es erlaubt eine große Anzahl dieser Operationen vektoriell zu charakerisieren. Es gibt jedoch untergründigere geometrische Informationen bezüglich Rotationen und Reflektionen, die nicht über ihre Wirkung auf Vektoren beschrieben werden können und unter dem Begriff orientation-entanglement (Verschlaufung) zusammengefasst werden. Anschauliche Beispiele hierfür liefern z.B. das sogenannte Dirac Scissors Problem, das von dem Physiker Piet Hein entwickelte Spiel Tangloids oder eine durch vier Gummibänder, horizontal in einem Raum befestigte Tasse. Gemeinsam haben alle die Eigenschaft, bei einer Rotation von 360° um eine bestimmte Achse nicht wieder auf ihre urpsrüngliche Position abgebildet zu werden, wie dies bei Vektoren zu erwarten wäre, sondern erst nach einer Rotation von 720° und anschließenden Translationen parallel zu dieser Achse. Allgemeiner stellen Rotationen um $0, \pm 4\pi, \pm 8\pi, \ldots$ Orientierung und Verschlaufung wieder her, Rotationen um $\pm 2\pi, \pm 6\pi, \pm 10\pi, \ldots$ reproduzieren hingegen einzig die anfängliche Orientierung und nicht die Verschlaufung. Ein Spinor ist dann die Verallgemeinerung eines Vektors, der diese geometrischen Schwierigkeiten der orthogonalen Gruppen, wie z.B. Dreh- oder Lorentz-Gruppe, überwindet. Es gibt mindestens zwei verschiedene Wege den Begriff des Spinors zu definieren:

Einer davon ist darstellungsheoretisch. Hier ist a priori bekannt, dass es zur Lie-Algebra der orthogonalen Gruppe Darstellungen geben muss, die nicht über die üblichen Tensorkonstruktionen erreicht werden können. Solche Darstellungen werden Spin-Darstellungen genannt und ihre Elemente Spinoren. Die Spinoren gehören zur Darstellung einer zweifach Überlagernden der Drehgruppe $SO(n, \mathbb{R})$ oder allgemeiner zur speziellen orthogonalen Gruppe $SO(p, q, \mathbb{R})$ über Räumen mit Metriksignatur (p, q). Die zweifach Überlagernden sind die mit Spin(p, q) bezeichneten Lie-Gruppen, in denen dann alle Eigenschaften bezüglich Spinoren definiert werden können.

Der zweite Weg ist geometrischer Natur. Durch Betrachtungen sogenannter Stereographischer Projektionen können Spinoren konstruiert und anschließend ihr Verhalten unter der Wirkung der relevanten Lie-Gruppen untersucht werden. Letztere Methode hat den Vorteil anschaulicher zu sein, erstere stellt die Betrachtungen in einen erweiterten Kontext und trifft allgemeinere Aussagen über das Verhalten von Spinoren. In dieser Darstellung wird daher versucht, Aspekte beider Methoden zu berücksichtigen.

3.1 Lorentz- und Poincaré-Gruppe

Das Raumzeit-Kontinuum der relativistischen Quantenmechanik wird über den Minkowski-Raum \mathcal{M}_4 , ein affiner Raum, versehen mit einer Bilinearform (Metrik) η_{ij} mit Signatur -2, beschrieben. Die *Strukturgruppe* des Minkowskiraumes, dh. die Menge aller Transformationen in \mathcal{M}_4 welche die Metrik invariant lassen, ist die *Poincaré-Gruppe*. Diese setzt sich aus der *Lorentz-Gruppe* und der zu \mathbb{R}^4 isomorphen Translationsgruppe zusammen. Die homogene Lorentz-Gruppe \mathcal{L} ist die Menge der linearen, homogenen Transformationen Λ des \mathcal{M}_4 , genannt Lorentztransformationen, die das Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen:

$$\mathcal{L} = \{\Lambda \in \mathbf{GL}(4 \times 4) | \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}.$$
(3.1.1)

Dies entspricht genau der Gruppe der pseudo-orthogonalen Transformationen O(1,3). Also gilt:

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{O}(1,3).$$

Durch Determinantenbildung der Pseudo-Orthogonalitätsrelation und durch Klassifizieren nach dem Vorzeichen des Eintrags $\Lambda^i{}_j$, erhält man die vier Zusammenhangskomponenten der Lorentzgruppe. Da jedoch nur in der *eigentlich-orthochronen Lorentz-Gruppe* L^{\uparrow}_+ mit $det(\Lambda) = 1$ und $\Lambda^0{}_0 > 0$ die Identität enthalten ist, bildet nur diese eine Untergruppe von O(1,3), die Lie-Untergruppe SO(1,3):

$$SO(1,3) = \{\Lambda \in O(1,3) | det(\Lambda) = 1, \Lambda^0_0 > 0\}.$$
(3.1.2)

Die Gruppe der inhomogenen linearen Transformationen auf \mathcal{M}_4 haben die Form

$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}' = \Lambda \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{a} \in \mathcal{M}_4, \Lambda \in \mathcal{L}$$
 (3.1.3)

Die Poincaré-Gruppe \mathcal{P} besteht somit aus den folgenden Elementen:

$$\mathcal{P} = \{ (\Lambda, a) | a \in \mathcal{M}_4, \Lambda \in \mathcal{L} \}.$$
(3.1.4)

In der relativistischen Quantenmechanik wird die fundamentale Bedeutung der Poincaré-Gruppe unter anderem darüber verdeutlicht, dass Elementarteilchen nach den irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe klassifiziert werden.

Die Verknüpfung der Poincaré-Gruppe mit der globalen Struktur des Minkowski-Raums (er kann als homogener Raum der Poincaré-Gruppe definiert werden), lässt auftauchende Schwierigkeiten beim Übergang zur allgemeinen Relativitätstheorie erahnen. Denn hier ist das Raumzeit-Kontinuum nicht länger ein affiner Raum, sondern eine Mannigfaltigkeit, deren Krümmung durch die Energieverteilung, ausgedückt über den Energie-Impuls-Tensor, bestimmt ist. Wie im letzten Kapitel besprochen kann eine Gemeinsamkeit zum Minkowski-Raum einzig durch das "Anheften" von Minkowski-Vektorräumen, die ebenfalls Bilinearformen mit Signatur –2 tragen, an einzelne Punkte der Mannigfaltigkeit gefunden werden. Demzufolge verflüchtigt sich die Bedeutung der Poincaré-Gruppe, denn nur in den seltensten Fällen wird eine nichttriviale, globale Invarianzgruppe der Raumzeit existieren, die dann zudem nicht mit der Poincaré-Gruppe übereinstimmt. Ebenso verwischen die Konturen des Teilchenbegriffs der Quantenfeldtheorie. Zusammen mit einigen anderen Schwierigkeiten ist auch dies Ausdruck der momentan bestehenden Unvereinbarkeit von Quantentheorie und ART.

Die Lorentz-Gruppe überlebt jedoch den Schritt vom flachen zum gekrümmten Raum. Da sie Invarianzgruppe des Minkowski-Vektorraums ist, wirkt sie nur an einem (jedem) Punkt. Sie ist die wirklich fundamentale Gruppe der relativistischen Physik und ihre Darstellungen besitzen physikalische Bedeutung in vielen Bereichen. Die darunter bekannteste ist die sie definierende Vierervektor-Darstellung im Minkowski-Raum. Die Lorentz-Gruppe ist eine halbeinfache Gruppe¹, deren endlichdimensionale Darstellungen alle vollreduzibel² sind. Es genügt dann, die irreduziblen Darstellungen zu suchen und zu klassifizieren. Unter diesen sind zwei Darstellungen ausgezeichnet: die beiden zweidimensionalen Spinordarstellungen sind Fundamentaldarstellungen der Lorentz-Gruppe, d.h. alle Darstellungen können aus geeigneten Tensorprodukten dieser beiden gewonnen werden. Damit kommt ihnen eine grundlegende Bedeutung zu. Die Vektoren der Darstellungsräume sind die (un)gepunkteten Spin-Vektoren und die Tensoralgebra, welche auf diesen Räumen aufgebaut wird, nennt sich Spinor-Algebra. Somit können Spin-Vektoren zum Aufbau aller anderen Tensoren dienen. Auf eine explizite Entwicklung solcher Transformationsrelationen wird jedoch in dieser Arbeit verzichtet, da sie zur Herleitung der Dirac-Gleichung in gekrümmter Raumzeit nicht zwangsläufig erforderlich ist.

Die Zweidimensionalität der Spin-Vektorräume, die in dieser Form einzig auf der zu Grunde liegenden vierdimensionalen Raumzeit basiert, vereinfacht den entstehenden Spinor-Kalkül deutlich. In höheren Dimensionen können zwar ebenso Spinor-Darstellungen der entsprechenden Lorentz- oder Rotationsgruppen gefunden werden, deren Dimension wächst jedoch exponentiell mit der Raumzeit-Dimension, so dass schon für Dimension 8 der Spin-Vektorraum ebenfalls achtdimensional wird. Es ist also nur in den Dimensionen drei und vier zu erwarten, mit Hilfe des Spinor-Kalküls wesentliche Einblicke in die Raumzeitgeometrie zu erhalten.

Da in diesem Kapitel größtenteils algebraische und gruppentheoretische Betrachtungen erfolgen, werden Summen zunächst explizit ausgeschrieben und alle Indizes wie in Anhang A mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnet. Auf die einsteinsche Summenkonvention wird in dieser Diskussion daher verzichtet.

3.2 Definition eines 2-komponentigen Spinors

Hier soll zunächst eine geometrisch motivierte Definition eines Spinors gegeben werden die sich an [8] orientiert. Dazu werden zwei Vektoren $\mathbf{X}_1 = (x_1, y_1, z_1), \mathbf{X}_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ gewählt, welche zueinander orthogonal stehen und gleiche Norm besitzen. Sie spannen eine Ebene auf und legen über eine intrinsische Ordnung, hier $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$, eine Orientierung fest. Wegen der ersten beiden Bedingungen ergibt sich:

$$\|\boldsymbol{X}_1\|^2 = \|\boldsymbol{X}_2\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

= $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$ (3.2.1)

Mit $\mathbf{Z} = (x, y, z) = \mathbf{X}_1 + i\mathbf{X}_2$ werden aus den Komponenten der Vektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 komplexe Zahlen:

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = y_1 + iy_2, \quad z = z_1 + iz_2,$$
(3.2.3)

die mit den Relationen (3.2.2) und (3.2.2) das Normquadrat des neuen Vektors ergeben:

$$Z \cdot Z = ||Z||^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + 2iX_1X_2$$

= $x^2 + y^2 + z^2 = 0.$ (3.2.4)

Ein solcher Vektor mit verschwindender Norm wird Isotropischer Vektor genannt. Wegen (3.2.4) können die drei komplexen Zahlen x, y, z, durch zwei andere komplexe Zahlen ausgedrückt wer-

11

¹Dies ist eine Gruppe ohne abelschen Normalteiler

₂Eine Darstellung D in V heisst: 1.) <u>reduzibel</u>: wenn es invariante Unterräume gibt, 2.) <u>irreduzibel</u>: wenn es keine invarianten Unterräume gibt, 3.) <u>vollreduzibel</u>: wenn D äquivalent ist zu $D_1 \bigoplus D_2 \bigoplus \ldots$ mit irreduziblen D_i .

den. Umstellen von (3.2.4) ergibt:

$$z^{2} = -(x^{2} + y^{2}) = -(x + iy)(x - iy). \qquad (3.2.5)$$

Setzt man

$$x + iy = \phi^2$$
 und $x - iy = -\psi^2$, (3.2.6)

ergibt Subtraktion der Gleichungen (3.2.6) und Einsetzen in (3.2.5) dann:

$$x = x_1 + ix_2 = \frac{1}{2}(\phi^2 - \psi^2)$$

$$y = y_1 + iy_2 = \frac{1}{2i}(\phi^2 + \psi^2)$$

$$z = z_1 + iz_2 = \phi\psi.$$

(3.2.7)

Für zwei orthogonale Vektoren X_1 und X_2 mit gleicher Norm werden die zwei komplexen Zahlen ϕ, ψ demnach durch die Relationen (3.2.7) bestimmt. Umgekehrt können durch die Zerlegung von (3.2.7) in den jeweiligen Real- und Imaginärteil die Komponenten der beiden Vektoren bestimmt werden. Oben Gesagtes motiviert nun eine neue Definition:

Definition 3.2.1 Die Menge der zwei komplexen Zahlen ϕ , ψ kann als Darstellung der beiden Vektoren X_1, X_2 aufgefasst werden. Ein geordnetes Paar (ϕ , ψ), verbunden mit den Vektoren X_1, X_2 über die Beziehungen (3.2.7) wird **Spinor**, gelegentlich auch Pauli-Spinor, genannt. Wenn die Norm der Vektoren X_1, X_2 gleich Eins ist, wird (ϕ , ψ) unitärer Spinor genannt.

Die Definition eines Spinors ist mit simpler Mathematik gefunden und vermag bisher wenig über die vielfältigen Eigenschaften dieser Objekte auszusagen, wird aber im weiteren Verlauf noch an Bedeutung gewinnen. Für eine gruppentheoretische Definition wird sie jedoch ersteinmal zurückgestellt.

3.3 Clifford- und Lie-Algebra

Die Geometrische Algebra - wie die Clifford-Algebra von William Kingdon Clifford persönlich bezeichnet wurde [9], hat ihre Ursprünge einerseits in der von Herrmann Grassmann eingeführten und anschließend von Élie Cartan weiterentwickelten äußeren Algebra [10], andererseits in der von Sir William Rowan Hamilton erdachten Algebra der Quaternionen [11]. Sie sollte die beiden auch in der heutigen Physik noch relevanten Methoden in einem gemeinsamen mathematischen Rahmen vereinigen und hat den Vorteil, durch das Clifford-Produkt (Clifford-Multiplikation) eine vollständige geometrische Beziehung von zwei algebraischen Vektoren zu definieren [12]. Im Gegensatz hierzu besitzen weder das Skalarprodukt, noch das Keilprodukt allein die Eigenschaft algebraischen Vektoren, Längen und Richtung ohne Metrik zuzuordnen. Das Interesse an der Clifford-Algebra soll sich hier, wie in der Physik üblich, auf ihre Relevanz zur Definition der Spin-Gruppe beschränken und wird im Kontext der Pauli- und Dirac-Matrizen auftreten.

3.3.1 Lie-Algebra

Eine Algebra $\mathfrak{al} = (V, *)$ ist ein Vektorraum V über dem Körper K mit einer inneren Verknüpfung *, genannt Produkt . Somit wird jedem Paar von Vektoren $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ aus V ein Vektor \boldsymbol{z} aus V zugeordnet, sodass durch

$$\boldsymbol{x} \ast \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \,, \tag{3.3.1}$$

der Vektor \boldsymbol{z} das Produkt von \boldsymbol{x} und \boldsymbol{y} genannt wird. Es soll bilinear

$$\left(\sum_{i} \alpha_{i} \boldsymbol{x}_{i}\right) * \left(\sum_{j} \beta_{j} \boldsymbol{y}_{j}\right) = \sum_{i,j} \alpha_{i} \beta_{j} (\boldsymbol{x}_{i} * \boldsymbol{y}_{j})$$
(3.3.2)

und assoziativ sein

$$\boldsymbol{x} * (\boldsymbol{y} * \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) * \boldsymbol{z}$$
(3.3.3)

und ist demnach eine bilineare Abbildung. Ein Spezialfall sind hierbei die Bilinearformen, bezeichnet mit $q: V \times V \to \mathbb{K}$. Eine Abbildung $Q: V \to \mathbb{K}$ heißt dann quadratische Form, falls es eine solche, zugeordnete symmetrische Bilinearform q gibt, mit $Q(\boldsymbol{v}) = q(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle, \boldsymbol{v} \in V$.

Das klassische Kreuzprodukt des \mathbb{R}^3 , $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$ ist z.B. solch ein bilineares Produkt und der Vektorraum \mathbb{R}^3 somit eine Algebra. Auch für die infinitesimalen Matrizen J_1, J_2, J_3 der Gruppe $\boldsymbol{SO}(3)$, welche eine Basis des dreidimensionalen Vektorraumes V_3 bilden, kann ein solches Produkt gefunden werden:

$$J_i * J_j = J_i J_j - J_j J_i = [J_i, J_j], \qquad (3.3.4)$$

genannt Kommutator von J_i und J_j . Das Produkt der beiden ergibt dann ein neues Element von V_3 und ist aus der Quantemechanik des Drehimpulses bestens bekannt:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \,. \tag{3.3.5}$$

(3.3.5) ist ebenfalls eine bilineare Operation und V_3 somit eine Algebra genannt $\mathfrak{so}(3)$.

Definition 3.3.1 Eine Lie-Algebra¹ ist ein Vektorraum $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ über einem Körper \mathbb{K} zusammen mit einer Verknüpfung $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, mit $(x, y) \mapsto [x, y]$, welche Lie-Klammer genannt wird und den folgenden Bedingungen genügt:

- 1. Sie ist bilinear. Also gilt $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$ und $[z, \alpha x + \beta y] = \alpha[z, x] + \beta[z, y]$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$
- 2. Sie genügt der Jacobi-Identität. Also gilt [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 für alle $x,y,z \in \mathfrak{g}$.
- 3. Es gilt [x,x] = 0 für alle $x \in \mathfrak{g}$.

Zu jeder Lie-Gruppe² G mit den Basiselementen $\{B_i(\varphi)\}_{i=1,..,n}$ kann eine Lie-Algebra \mathfrak{g} definiert werden. Diese wird durch die infinitesimalen Erzeugenden der Lie-Gruppe am neutralen Element

$$X_{i} = \left[\frac{dB_{i}(\varphi_{i})}{d\varphi_{i}}\right]_{\varphi_{i}=0}$$
(3.3.6)

erzeugt. Mittels der infinitesimalen Erzeugenden werden über

$$[X_i, X_j] = \xi_{ijk} X_k \tag{3.3.7}$$

die Strukturkonstanten ξ_{ijk} der Lie-Algebra definiert. Sie charakterisieren die Lie-Algebra, da diese nur Lie-Algebra einer einzigen, einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe sind. So gehört z.B. die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ (kleine gothischen Buchstaben) zur Lie-Gruppe SU(2) (fett gedruckte Großbuchtaben). Alle weiteren Lie-Gruppen mit gleicher Lie-Algebra, werden von der einfach zusammenhängenden überlagert. Dann sind zwei Lie-Algebren isomorph falls es Basen gibt, so dass die Strukturkonstanten ξ_{ijk} gleich sind.

Beispiele für eine Lie-Algebra wurden oben angegeben. In der Basis der J_1, J_2, J_3 entsprechen die Strukturkonstanten ξ_{ijk} also dem bekannten Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} .

 $_1$ Benannt nach Sophus Lie (norwegischer Mathematiker, †1899)

₂Mannigfaltigkeit mit Gruppenstruktur, so dass das Produkt als Abbildung von $G \times G \rightarrow G \in C^{\infty}$ ist, d.h. eine glatte Mannigfaltigkeit endlicher Dimension n

3.3.2 Clifford-Algebra

Betrachtet werden nun *n* Elemente e_j , $1 \le j \le n$, welche die folgende Beziehung erfüllen:

$$e_i e_j + e_j e_i = \{e_i, e_j\} = 2\langle e_i, e_j \rangle = 2\delta_{ij}.$$
 (3.3.8)

Die Elemente können hier z.B. Matrizen oder Operatoren darstellen. Wird das Produkt der Erzeugenden dieser Elemente

$$e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_p},$$
 (3.3.9)

mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ und $0 \le p \le n$ gebildet und läuft p von 0 bis n, so gibt es 2^n Kombinationsmöglichkeiten wenn zusätzlich noch das neutrale Element miteinbezogen wird. Damit erhält man:

$$1, e_i, e_i e_j, \dots, e_1 e_2 \dots e_n. \tag{3.3.10}$$

Da die e_j antikommutieren, $e_i e_j = -e_j e_i$, können ihre Produkte nach steigender Ordnung sortiert werden. Es kann außerdem gezeigt werden, dass diese Produkte linear unabhängig sind und somit auch als Basis dienen können [13].

Definition 3.3.2 Es sei V ein \mathbb{K} Vektorraum mit den obigen 2^n Produkten als Basis. Durch eine symmetrische Bilinearform $q(\cdot, \cdot)$ und der damit verknüpften quadratischen Form $Q : V \to \mathbb{K}$, erhält der Vektorraum V die Struktur einer Algebra, genannt **Clifford-Algebra**, bezeichnet mit **Cl**(V,Q) und Dimension 2^n .

Ist der Raum $V = \mathbb{R}^n$ ein Minkowski-Raum der Signatur (p,q) mit Dimension n := p + q, d.h. die quadratische Form ist gegeben durch $Q(\boldsymbol{v}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2$ mit $\boldsymbol{v} \in V$, so wird die Clifford-Algebra auch mit $Cl(p,q) = Cl(p,q,\mathbb{R})$ bezeichnet.

Gerade und ungerade Unteralgebren

Bei den Produkten $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_p}$ einer 2^n -dimensionalen Clifford-Algebra kann zwischen Produkten mit geradem und ungeradem p unterschieden werden. Es kann eine Abbildung $V \to V$, $v \mapsto$ -v definiert werden, welche die quadratische Form Q(v) = q(v, v) erhält. Diese kann zu einem, mit der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebra verträglichen Algebra-Automorphismus $\alpha : Cl(V,Q) \to Cl(V,Q)$ erweitert werden. Da für alle $v \in Cl(V,Q)$, $\alpha(\alpha(v)) = v$ gilt, ist α eine Involution¹. Daher ergibt sich eine Aufspaltung von Cl(V,Q) in einen geraden, $Cl^0(V,Q)$, und einen ungeraden Anteil, $Cl^1(V,Q)$, der Form

$$Cl(V,Q) = Cl^{0}(V,Q) \otimes Cl^{1}(V,Q)$$

nit
$$Cl^{i}(V,Q) = \{ \boldsymbol{x} \in Cl(V,Q) | \alpha(\boldsymbol{x}) = (-1)^{i} \boldsymbol{x} \}.$$
 (3.3.11)

Allerdings bildet einzig $Cl^{0}(V,Q)$ eine Unteralgebra.

3.3.3 Beispiele für Clifford-Algebren

ľ

Anstelle der Bedingung (3.3.8), kann auch

$$e_i e_j = -e_j e_i$$
, für $i \neq j$ und $e_j^2 = -1$ (3.3.12)

geschrieben werden, wobei die Elemente e_j hier mit der imaginären Einheit *i* multipliziert wurden. Wie Anfangs schon erwähnt können die Pauli und Dirac-Matrizen als Beispiele für eine Clifford-Algebra dienen.

 $_1 {\rm Eine}$ Involution ist eine selbstinverse Abbildung. In der Geometrie sind z.B. Punkt- und Geradenspiegelungen Involutionen

Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(3.3.13)

genügen der Beziehung:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}, \qquad \text{für} \qquad i, j = 1, 2, 3.$$
(3.3.14)

Ein Vergleich mit (3.3.8) zeigt, dass die σ_i als Erzeugende einer Clifford-Algebra dienen können. σ_0 ist die Einheitsmatrix mit Rang 2. Dann können die folgenden $2^3 = 8$ Matrizen gebildet werden:

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

$$(3.3.15)$$

Desweiteren erfüllen sie die Beziehungen

$$\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3, \qquad \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1, \qquad \sigma_1 \sigma_3 = i\sigma_2, \qquad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_0 \tag{3.3.16}$$

und somit erhält man die folgenden, über dem Körper \mathbb{R}^3 , linear unabhängigen Matrizen

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, i\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3, \qquad (3.3.17)$$

welche eine achtdimensionale Clifford-Algebra erzeugen. Zu einem beliebigen Vektor X aus V_3 des \mathbb{R}^3 mit Basis $\{e_i\}_{i=1,2,3}$, so dass gilt:

$$\boldsymbol{X} = xe_1 + ye_2 + ze_3, \qquad (3.3.18)$$

korrespondiert eine 2×2 -Matrix

$$X = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3. \tag{3.3.19}$$

Einsetzen von (3.3.13) ergibt

$$X = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}.$$
 (3.3.20)

Diese Korrespondenz ist also ein Isomorphismus zwischen dem euklidischen Vektorraum V_3 und dem Vektorraum der hermiteschen 2 × 2-Matrizen, welche die Elemente der Lie-Gruppe SU(2) darstellen. Die Pauli-Matrizen sind somit Erzeugende der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ und die durch sie gebildete Clifford-Algebra Cl(3) ist dann eine des euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 . Werden jetzt noch die oben gefundenen Beziehungen (3.2.6) und (3.2.7) eingesetzt, ergibt sich aus (3.3.20):

$$X = \begin{pmatrix} \phi\psi & -\psi^2\\ \phi^2 & -\phi\psi \end{pmatrix}.$$
 (3.3.21)

Schon hier sieht man, dass die Pauli-Matrizen also die Darstellung eines reellen, dreidimensionalen Vektors durch die Elemente eines zweidimensionalen, komplexen Raumes ermöglichen. Im Folgenden wird weiter darauf eingegangen.

<u>Dirac-Matrizen</u>

Die Dirac-Matrizen lassen sich kompakt mit Hilfe der Pauli-Matrizen schreiben (jeder Eintrag steht hier für eine 2×2 -Matrix):

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.22}$$

Sie erfüllen die Relation (3.3.8)

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\eta_{ij}$$
 für $i, j = 0, 1, 2, 3,$ (3.3.23)

wobe
i η_{ij} die Komponenten der Minkowski-Metrik darstellen, so
dass

 $\eta_{ij} = 0$ für $i \neq j$, $\eta_{00} = 1$, $\eta_{jj} = -1$. (3.3.24)

Damit erhält man für die Dirac-Matrizen

$$(\gamma_0)^2 = \mathbb{1}, \qquad (\gamma_j)^2 = -\mathbb{1}.$$

Wird nun $\gamma_0 = \alpha_0$ und $\gamma_j = i\alpha_j$ gesetzt, ergibt sich aus (3.3.23):

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$$
 für $i, j = 0, 1, 2, 3.$ (3.3.25)

Die Matrizen α_j formen nun $2^4 = 16$ linear unabhängige Produkte, welche eine Basis für eine sechszehn-dimensionale Clifford-Algebra Cl(1,3) bilden. Der Minkowski-Raum \mathcal{M}_4 kann mit dem Vektorraum der hermiteschen Matrizen, generiert durch $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; identifiziert werden. Zu einem Vektor $\mathbf{X} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{M}_4$ korrespondiert dann eine hermitesche Matrix X; definiert durch:

$$X = x_0 \sigma_0 + x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3.$$
(3.3.26)

Einsetzen der Pauli-Matrizen ergibt

$$X = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.$$
 (3.3.27)

Diese Korrespondez ist ein Isomorphismus der kanonischen Darstellung des Minkowski-Raums und der durch die Pauli-Matrizen generierten Darstellung. Die Algebra Cl(1,3) ist also eine Clifford-Algebra des Minkowski-Raums \mathcal{M}_4 und wird *Dirac-Algebra* genannt.

3.3.4 Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ und $\mathfrak{so}(n)$

Betrachtet werden zunächst drei, eine Clifford-Algebra erzeugende Elemente $e_i, (i = 1, ..., n)$, die somit der Relation (3.3.8) genügen. Es soll gezeigt werden, dass die Elemente

$$M_{ij} = \frac{1}{2}e_i e_j$$

eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ bzw. $\mathfrak{so}(n)$ formen. Dazu werden die Kommutatoren der M_{ij} 's gebildet, die exakt den obigen Kommutatorrelationen (3.3.5) entsprechen werden. Im Falle n = 3 gibt es nur die drei folgenden unabhängigen Elemente:

$$M_{12} = \frac{1}{2}e_1e_2 = -M_{21}$$
 bzw. $M_{13} = -M_{31}, M_{23} = -M_{32}.$ (3.3.28)

Damit ergeben sich Kommutatorrelationen untereinander:

$$[M_{12}, M_{13}] = \frac{1}{4}(e_1e_2e_1e_3 - e_1e_3e_1e_2) = M_{32}, \qquad (3.3.29)$$

wobei die Beziehung

$$e_1 e_2 e_1 e_3 = e_1 (2\delta_{21} - e_1 e_2) e_3 = 2M_{32}$$
(3.3.30)

benutzt wurde. Die anderen Kommutatoren ergeben sich analog zu

$$[M_{32}, M_{12}] = M_{13}, \qquad [M_{13}, M_{32}] = M_{12}.$$
(3.3.31)

Für $M_{12} = J_x$, $M_{13} = J_y$, $M_{23} = J_z$ erfüllen (3.3.29) und (3.3.31) genau die Relationen der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ aus Gleichung (3.3.5) und bilden somit die infinitesimalen Erzeugenden der Drehgruppe SO(3). Die Beziehungen legen, bis auf einen Isomorphismus, die Strukturkonstanten fest und definieren somit eine Lie-Algebra.

Für den allgemeineren Fall ergibt sich aus der Kommutatorberechnung, mit Hilfe von (3.3.30):

$$[M_{ij}, M_{rs}] = \frac{1}{4} (e_i e_j e_r e_s - e_r e_s e_i e_j) = \delta_{is} M_{jr} + \delta_{ir} M_{sj} + \delta_{sj} M_{ri} + \delta_{rj} M_{is}, \qquad (3.3.32)$$

welche die Kommutatorrelationen der orthogonalen Gruppe O(n) erfüllen. Es wir jetzt eine Darstellung dieser Gruppe gesucht. Dabei ist V_n der Darstellungsraum, welcher von den Elementen e_k erzeugt wird. Zunächst ein sehr kurzer Einschub.

Exponentialabbildung

In der Theorie der Lie-Gruppen wird eine Abbildung von der Lie-Algebra einer bestimmten Lie-Gruppe in eine Gruppe, welche die lokale Gruppenstruktur dieser Lie-Algebra erhält *Exponentialabbildung* genannt. Sie ist der Hauptgrund dafür, dass Lie-Gruppen durch die zu Grunde liegenden Lie-Algebren untersucht werden können. Bei einer Matrix Lie-Gruppe fallen Exponentialabbildung und das *Matrixexponential* zusammen. Letztere ist eine Funktion auf der Menge der quadratischen Matrizen, welche analog zur reellen Exponentialfunktion definiert ist. Das Matrixexpontial stellt die Verbindung zwischen Lie-Algebra und der zugehörigen Lie-Gruppe her. Sei X eine reelle oder komplexe $n \times n$ -Matrix. Das Exponential von X, welches durch e^X oder $\exp(X)$ bezeichnet wird, ist die $n \times n$ -Matrix, welche durch die folgende Potenzreihe definiert ist:

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \,. \tag{3.3.33}$$

Diese Reihe konvergiert immer, daher ist das Exponential von X wohldefiniert. Wenn X eine 1×1 -Matrix ist, entspricht das Matrixexponential von X der gewöhnlichen Exponentialfunktion. Desweiteren kann gezeigt werden [8], dass zu jeder Lie-Gruppe eine ein-parametrige Untergruppe existiert, wobei jedes Element der Gruppe entweder durch Elemente der Untergruppe aufgebaut wird oder aber selbst Teil der Untergruppe ist. Dadurch lassen sich die Untergruppe und ihre Elemente über die Exponentialabbildung und einen einzigen Parameter (θ) aus den infinitesimalen Erzeugenden der zu Grunde liegenden Lie-Algebra bestimmen. Das hier Besprochene soll nun Anwendung finden.

Betrachtet wird jetzt der oben angekündigte Darstellungsraum V_n , erzeugt von den Elementen e_k . Die durch den Einschub motivierten Matrizen

$$S_{ij}(\theta) = \exp(\theta M_{ij}), \qquad (3.3.34)$$

lassen sich über die Eulersche Identität und die Antikommutationsrelationen (3.3.12) umschreiben. Wegen (3.3.12) gilt $(\frac{1}{2}e_ie_j)^2 = -\frac{1}{4}$ und in der Reihenentwicklung des Kosinus kommen genau diese quadratischen Terme der Exponentialfunktion vor. Da sich dieselbe Relation (3.3.12) auch bei den ungeraden Termen der Sinusentwicklung bemerkbar macht, entfällt die Notation über die Imaginäre Einheit. Dann erhält man:

$$S_{ij}(\theta) = \exp[(\frac{1}{2}\theta)e_i e_j] = \cos(\frac{1}{2}\theta)\mathbb{1} + e_i e_j \sin(\frac{1}{2}\theta).$$
(3.3.35)

Die allgemeinsten linearen Transformation eines Vektors X bzw. einer Matrix X, welche die Determinante und die Hermitizität erhalten, sind Transformationen der Form

$$X \longrightarrow X' = UXU^{\dagger}, \qquad (3.3.36)$$

wobei $U \in SU(n)$. Dies ist die spezielle unitäre Gruppe der unitären $n \times n$ -Matrizen mit Determinante 1 und komplexen Einträgen. Es soll nun gezeitg werden, dass solch eine Transformation eines Vektors \mathbf{X} mit $S_{ij}(\theta)\mathbf{X}(S_{ij}(\theta))^{\dagger} = S_{ij}(\theta)\mathbf{X}S_{ij}(-\theta)$ eine Rotation ergibt. Betrachtet werden dafür erneut die Elemente e_i . Das Ergebnis ist dann:

$$S_{ij}(\theta)e_iS_{ij}(-\theta) = e_i\cos(\theta) + e_j\sin(\theta)$$

$$S_{ij}(\theta)e_jS_{ij}(-\theta) = -e_i\sin(\theta) + e_j\cos(\theta),$$
(3.3.37)

wobei die trigonometrischen Identitäten $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x)\cos(x)$ und $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ verwendet wurden. Dies ist offensichtlich eine Rotation in V_n und die Matrizen (3.3.34) bilden somit eine Darstellung der SO(n), während die Matrizen M_{ij} eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(n)$ formen.

3.4 Spin-Gruppe

3.4.1 SO(3) und SU(2)

Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die mit einer Rotation identifizierten Matrizen $S_{ij}(\theta)$ (3.3.35) bei einer Rotation um ungerade Vielfache von 2π das Vorzeichen ändern. Dieser Vorzeichenwechsel tritt bei den eben eingeführten Vektortransformationen (3.3.36) der Drehgruppe SO(3) (hier wird der Fall n = 3 betrachtet) nicht auf (vgl. dazu (3.3.37) bei einer Rotation von 2π). Dies ist jedoch nicht das einfachste Transformationsgesetz, das gefunden werden kann. Oben wurde gezeigt, dass jeder Vektor X über die Pauli-Matrizen als 2×2 -Matrix (3.3.20) darstellbar ist. Eine lineare Transformation, welche die Determinante und die Hermitizität solch einer 2×2 -Matrix erhält, wäre dann genau die Transformation (3.3.36) mit $U \in SU(2)$. Für ein Objekt welches über

$$\psi \longrightarrow \psi' = U\psi = S(\theta)\psi$$
, mit $S(\theta) = U \in SU(2)$ (3.4.1)

transformiert, wird erstens der Vorzeichenwechsel vollzogen und zweitens das Transformationgesetz auf seine einfachste Form gebracht. Damit korrespondieren die Elemente U und -U aus SU(2) beide zu einer einzigen Rotation in SO(3). SU(2) ist somit die zweifach Überlagernde von SO(3). Die Gruppe der gerade besprochenen Transformationsmatrizen S wird dann Spin(3)genannt und mit der speziellen unitären Gruppe SU(2) identifiziert. Objekte ψ , welche die Transformationseigenschaften (3.4.1) erfüllen, heißen Spinoren.

3.4.2 Definition über die Clifford-Unteralgebra $Cl^{0}(V)$

Eine, durch die Diskussion der Clifford-Algebra ermöglichte, Definition erfolgt über den geraden Teil derselben. Sei V ein Vektorraum mit nicht ausgearteter symmetrischer Bilinearform q und $Q(\mathbf{v}) = q(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. In der Clifford-Algebra Cl(V,Q) können dann Spiegelungen in V dargestellt werden. Dazu wird eine elementare Folgerung aus der Antikommutationsrelation des Produkts genutzt:

$$\frac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{x}\boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle} = \frac{(2\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle - \boldsymbol{x}\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle} = -\underbrace{\left(\boldsymbol{x} - 2\frac{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{x}\rangle\boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}\right)}_{*^{1}}.$$
(3.4.2)

Ist \boldsymbol{v} ein Einheitsvektor, $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle| = 1$, so ist die Abbildung $\boldsymbol{v} \mapsto S_{sp}(\boldsymbol{v}), S_{sp}(\boldsymbol{v}) x := \frac{\boldsymbol{v} \boldsymbol{x} \boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} = \pm \boldsymbol{v} \boldsymbol{x} \boldsymbol{v}$ die Spiegelung an der zu \boldsymbol{v} senkrechten Hyperebene, denn (*¹) ist eine sogenannte Householdertransformation¹. Jede Spiegelung ist eine orthogonale Abbildung, somit ist die von den Spiegelungen erzeugte Gruppe eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe.

₁Im dreidimensionalen Raum ist die Householdertransformation eine Spiegelung an einer Ebene (durch den Ursprung). Die Darstellung dieser linearen Abbildung durch eine Matrix $H = I - \frac{2}{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}} \boldsymbol{v} \boldsymbol{v}^T$, wird als Householder-Matrix bezeichnet

Die Pin-Gruppe

Auch jede orthogonale Abbildung lässt sich umgekehrt in ein Produkt aus Spiegelungen zerlegen. Die Zerlegung ist allerdings nicht eindeutig, aber die Clifford-Produkte der Einheitsvektoren der Spiegelmatrizen unterscheiden sich, wie oben gesehen, höchstens durch ihr Vorzeichen. Die *Pin-Gruppe* ist als die Gruppe aller dieser Produkte von Einheitsvektoren definiert:

$$Pin(V) := \{ \boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_k : k \in \mathbb{N}, \boldsymbol{v}_i \in V, |\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i \rangle| = 1 \}.$$

$$(3.4.3)$$

Sie wird zur Gruppe durch die Existenz eines Inversen: $v_1 \dots v_k v_k \dots v_1 = \pm 1$. Die Urbilder der gleichen orthogonalen Abbildung unterscheiden sich somit nur um das Vorzeichen.

Die Spin-Gruppe

Die oben schon eingeführte, physikalisch bedeutsamere Gruppe ist aber die Spin-Gruppe

$$Spin(V) := \{ \boldsymbol{v}_1 \dots \boldsymbol{v}_{2k} \in Pin(V) : k \in \mathbb{N} \} = Pin(V) \cap Cl^0(V)$$

$$(3.4.4)$$

der Produkte mit gerader Anzahl von Faktoren, also des geraden Teils $Cl^{0}(V)$ der Clifford-Algebra Cl(V). Oben wurde für den Spezialfall n = 3 schon gezeigt, dass sie eine zweifache Überlagerung der speziellen orthogonalen Gruppe SO(V) ist. Desweiteren ist sie einfach zusammenhängend, d.h. sie lässt selbst nur noch triviale Überlagerungen zu. Für die Clifford-Algebra Cl(1,3) des Minkowski-Raumes, erzeugt über die Dirac-Matrizen, ist die Spin-Gruppe Spin(1,3)dementsprechend zweifache Überlagerung der eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe SO(1,3). Sie kann mit der *speziellen linearen Gruppe* $SL(2, \mathbb{C})$ identifiziert werden, welche auch eine zweifache Überlagerung der SO(1,3) ist¹. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

3.5 $SL(2,\mathbb{C})$ und die Lorentz-Gruppe

Analog zur Korrespondenz zwischen SU(2) und SO(3), existiert eine Korrespondenz zwischen $SL(2, \mathbb{C})$ und SO(1,3), die hier etwas physikalischer als bisher betrachtet werden soll. Der Grund dafür liegt in der Möglichkeit aus dieser Beziehung die Dirac-Gleichung herzuleiten, die natürlich einer physikalischen Interpretation bedarf. Dabei wird zunächst wie in [14] vorgegangen.

Zwei relativ mit der Geschwindigkeit v zueinander bewegte Inertialsysteme sind über sogenannte "Lorentz-Boosts" (spezielle Lorentztransformationen) miteinander verbunden. Für eine relative Bewegung entlang der x-Achse sind diese Transformationen duch die Gleichungen

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$
(3.5.1)

ausgedrückt. Mit $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \beta = v/c, x_0 = ct, x_1 = x, \dots$ können sie als

$$x'_{0} = \gamma(x_{0} + \beta x_{1}), \quad x'_{1} = \gamma(\beta x_{0} + x_{1}), \quad x'_{2} = x_{2}, \quad x'_{3} = x_{3}$$
 (3.5.2)

geschrieben werden. Durch Umstellen erhält man $\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$ und Parametrisieren über den Parameter φ_x ergibt:

$$\gamma = \cosh(\varphi_x), \qquad \gamma\beta = \sinh(\varphi_x), \qquad (3.5.3)$$

wobei $\tanh(\varphi_x) = v/c$ gilt. Damit ist

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\varphi_x) & \sinh(\varphi_x) & 0 & 0 \\ \sinh(\varphi_x) & \cosh(\varphi_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
(3.5.4)

₁Nur wenn zusätzlich noch $\Lambda^0_0 > 0$ gefordert wird.

Die Transformationsmatrix wird *Boost-Matrix* genannt und mit B_x bezeichnet. Relation (3.3.6) wird verwendet um die infinitesimalen Erzeugenden dieser Boost-Transformationen zu finden. Dann gilt:

$$K_x = \frac{1}{i} \left[\frac{dB_x(\varphi_x)}{d\varphi_x} \right]_{\varphi_x=0}, \ K_y = \frac{1}{i} \left[\frac{dB_y(\varphi_y)}{d\varphi_y} \right]_{\varphi_y=0}, \ K_z = \frac{1}{i} \left[\frac{dB_z(\varphi_z)}{d\varphi_z} \right]_{\varphi_z=0}.$$
 (3.5.5)

Die beiden anderen Matrizen werden analog für Bewegungen in y- bzw. z-Richtung gefunden:

Bei einer aktiven Rotation¹ eines Vektors X um dieselben Achsen x, y, z ergibt sich im dreidimensionalen euklidischen Raum das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_x) & \sin(\varphi_x) \\ 0 & -\sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
 (3.5.7)

Die infinitesimalen Erzeugenden der *Rotations-Matrix* R_x werden wieder über (3.3.6) berechnet und ergeben im \mathcal{M}_4 unter Hinzunahme der zeitlichen x_0 -Komponente die folgenden 4×4 -Matrizen:

Die allgemeinsten Lorentztransformationen werden aus den eben eingeführten 6 Erzeugenden geformt, da sie aus 3 Boosts in 3 Richtungen und Rotationen um 3 Achsen bestehen. Die Kommutatorrelationen der J's und K's können nun explizit über die oben gegebenen Matrizen berechnet werden. Im Unterabschnitt (3.3.4) erfolgte dies schon für die Kommutatoren der J's der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3)$ über die allgemeinen Matrizen M_{ij} der Elemente e_k . Die Kommutatoren für (3.5.6) und (3.5.8) lauten dann:

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$$
(3.5.9)

Die Elemente der Kommutatoren (3.5.9), abstrakt wieder als M_{ij} geschrieben, genügen offenbar der Vertauschungsrelation der Lie-Klammer (3.3.7). Also bilden die sechs Erzeugenden M_{ij} mit $i, j = 0, \ldots, 3, i < j$ eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(1,3)$ bzw. der Lie-Algebra des Minkowski-Raumes. Die Strukturkonstanten der M_{ij} 's sind natürlich die Levi-Civita-Symbole ϵ_{ijk} . Die abstrakte Notation hat den Vorteil einen Ausdruck für allgemeine, infinitesimale Lorentz-Transformation zu geben, wobei gilt:

$$K_j = -iM_{j0} = iM_{0j}$$
 und $J_k = i\epsilon_{ijk}M_{ij}$, mit $i, j, k = 1, 2, 3$. (3.5.10)

In Matrixform ergibt sich dann:

$$M = \epsilon_{ijk} M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{01} & 0 & -\epsilon_{12} & -\epsilon_{13} \\ \epsilon_{02} & \epsilon_{12} & 0 & -\epsilon_{23} \\ \epsilon_{03} & \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$
 (3.5.11)

¹ Rotation des Vektors, nicht des Koordinatensystems

Die Zuordnung der M_{ij} 's zu den Erzeugenden K's ist also nicht eindeutig, daher formen diese keine geschlossene Algebra und reine Lorentztransformationen ergeben keine Gruppe [14]. Werden die Elemente e_k jetzt durch die Elemente α_l (3.3.25) der Dirac-Algebra ersetzt, lässt sich auch der allgemeine Kommutator der Lie-Algebra (3.3.32) berechnen und die einzelnen Komponenten M_{mn} mit den Komponenten der eben gefundenen Erzeugenden gleichsetzten. In (3.3.23) wurde schon gezeigt, dass die Dirac-Matrizen der Dirac-Algebra Cl(1,3) gehorchen. Da dies eine Algebra des Minkowski-Raumes ist, bilden sie auch eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(1,3)$, was durch die eben gewonnenen Erkenntnisse nochmals bestätigt wurde.

Da linker und mittlerer Kommutator (3.5.9) bis auf das Vorzeichen gleich sind, kann daraus geschlossen werden, dass infinitesimale Boosts in verschiedene Richtungen eine Drehung erzeugen! Dies ist der Ursprung der Thomas-Präzession [14]. Allerdings stellt, wie oben erwähnt, nur die erste Gleichung eine Lie-Algebra dar. Bei den anderen beiden spricht man von ihrer supersymmetrischen Erweiterung. Durch Definition neuer Operatoren kann zu zwei seperaten Lie-Algebren übergegangen werden. Dies führt zur rechten und linken Fundamentaldarstellung.

3.5.1 Die linke und die rechte Fundamentaldarstellung

Da gerade die Erzeugenden der Lorentztransformationen eingeführt wurden, soll nun das Transformationsverhalten von 2-komponentigen Spinoren bezüglich dieser Erzeugenden betrachtet werden. Die Kommutatorrelationen (3.5.9) werden, wie oben schon angedeutet, von den Pauli-Matrizen (3.3.13) erfüllt, da gilt:

$$\left[\frac{1}{2}\sigma_i, \frac{1}{2}\sigma_j\right] = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad \text{und somit} \quad K = \pm \frac{i}{2}\sigma.$$
(3.5.12)

Es muss also zwei verschiedene Arten von Spinoren geben, die zu den zwei Vorzeichen der K's korrespondieren. Diese Struktur der Lorentz-Algebra $\mathfrak{so}(1,3)$ lässt sich weiter vereinfachen, wenn aus den hermiteschen Erzeugenden J und K sechs neue, nicht-hermitesche Operatoren T^+ und T^- konstruiert werden:

$$T_j^{\pm} = \frac{1}{2} (J_j + iK_j), \quad \text{mit} \quad j = 1, \dots, 3.$$
 (3.5.13)

Die Kommutatorrelationen (3.5.9) verändern sich dann zu:

$$[T_i^+, T_j^+] = -i\epsilon_{ijk}T_k^+, \quad [T_i^-, T_j^-] = i\epsilon_{ijk}T_k^-, \quad [T_i^+, T_j^-] = 0.$$
(3.5.14)

Bei den linken und mittleren Gleichungen handelt es sich durch die Kommutatorrelation der Pauli-Matrizen (3.5.12) jeweils um eine Multiplikation zweier $\mathfrak{su}(2)$ Lie-Algebren. Da sie, wie aus der rechten Gleichung ersichtlich ist, auf getrennten Unterräumen wirken, könnte die Produktgruppe $SU(2) \otimes SU(2)$ als äquivalent zur SO(1,3) vermutet werden. Es wird sich jedoch herausstellen, dass es sich auf Grund der komplexen Linearkombination um die $SL(2,\mathbb{C})$ handelt. Die Produktgruppe und die eigentliche-orthochrone Lorentz-Gruppe sind allerdings lokal isomorph, ihre Lie-Algebren stimmen somit überein. Da T^+ und T^- beide SU(2) erzeugen, gibt es jeweils einen zu T^+ und T^- korrespondierenden Drehimpuls (j, j'). Wenn für einen der beiden der Spezialfall Spin-(0) gilt, ergibt sich:

$$(j,0) \to J^{(j)} = iK^{(j)}, \quad \text{für} \quad (T^- = 0)$$

 $(0,j) \to J^{(j)} = -iK^{(j)}, \quad \text{für} \quad (T^+ = 0),$ (3.5.15)

was genau die beiden Möglichkeiten (3.5.12) erfüllt. Im Unterabschnitt (3.4.1) wurde gezeigt, dass sich ein Spinor mit den Matrizen $S(\theta)$ (3.4.1) transformiert. Diese wurden über die Exponentialabbildung aus den Erzeugenden der jeweiligen Transformationsgruppe gewonnen. Damit

21

ergibt sich für die (eigentlich-orthochronen¹) Lorentztransformationen mit Parametern (θ, φ) von Rotationen und Boosts:

$$\Lambda = \exp[i(\theta \cdot J + \varphi \cdot K)]. \qquad (3.5.16)$$

Die Aufspaltung in zwei Darstellungen entspricht der sogenannten linken und rechten Fundamentaldarstellung.

Die linke Fundamentaldarstellung $(0, \frac{1}{2})$

Die Darstellung hat Spin-(1/2) und stellt den linkshändigen Spinor $\Psi_L = (\phi_L, \psi_L)^T$ dar. Er transformiert mit einer Spinordarstellung $T^+ = 0$ und $T^- = \sigma/2$, also gilt:

$$\Psi_L(x) \longrightarrow \Psi_L(x') = A_L \Psi_L(x) , \qquad (3.5.17)$$

wobei

$$A_L := \Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = \exp\left[i\frac{\sigma}{2}(\theta + i\varphi)\right], \qquad (3.5.18)$$

die linkshändige Transformationsmatrix ist.

Die rechte Fundamentaldarstellung $(\frac{1}{2}, 0)$

Die Darstellung hat Spin-(1/2) und stellt den rechtshändigen Spinor $\Psi_R = (\phi_R, \psi_R)^T$ dar. Er transformiert mit einer Spinordarstellung $T^+ = \sigma/2$ und $T^- = 0$, also gilt:

$$\Psi_R(x) \longrightarrow \Psi_R(x') = A_R \Psi_R(x), \qquad (3.5.19)$$

wobei

$$A_R := \Lambda^{\left(\frac{1}{2},0\right)} = \exp\left[i\frac{\sigma}{2}(\theta - i\varphi)\right], \qquad (3.5.20)$$

die rechtshändige Transformationsmatrix ist und Spinoren, die mit dieser transformieren, gepunktet genannt werden. Die Punkte dienen üblicherweise der Kennzeichnung des komplex Konjugierten werden hier aber nicht benötigt.

Durch die komplexe Linearkombination von den Drehimpuls-Erzeugenden J und den Boost-Erzeugenden K sind, wie oben erwähnt, die neuen Operatoren T^+ und T^- nicht mehr hermitesch. Dies hat nicht unitäre Darstellungen $A_{L/R}$ zur Folge. Da komplexe Konjugation bei nicht-unitären Matrizen durch Ähnlichkeitstransformationen nicht erreichbar ist, sind beide Fundamentaldarstellungen inäquivalente Darstellungen der Lorentz-Gruppe. Dennoch kann eine Relation gefunden werden:

$$A_L = \epsilon A_R^* \epsilon^{-1} = \bar{A}_R, \quad \text{mit} \quad \epsilon = -i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.5.21}$$

Denn es gilt ja $\sigma_2 \sigma^* \sigma_2 = -\sigma_2^2 \sigma = -\sigma$ und somit auch

$$\bar{A}_R = \sigma_2 \exp\left[-i\frac{\sigma^*}{2}(\theta + i\varphi)\right]\sigma_2$$

$$= \sigma_2^2 \exp\left[-i\frac{\sigma^*}{2}(\theta + i\varphi)\right]$$

$$= A_L. \qquad (3.5.22)$$

Die Matrix ϵ wird Spinor-Metrik genannt und wirkt auf Spinoren wie die Lorentz-Metrik auf Tensoren. Werden nun die Determinanten der Transformationsmatrizen der beiden Fundamentaldarstellungen gebildet, fällt auf, dass det $(A_L) = det(A_R) = 1$ ist und A_L und A_R somit

¹ von hieran wird nur von Lorentztransformationen, ohne Zusatz, gesprochen.

komplexe 2×2 -Matrizen mit Determinante 1 sind. Solche Matrizen bilden aber genau die Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$.

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} | \det A = 1\}.$$
 (3.5.23)

Sie hat eindeutig 6 Parameter, denn die Matrizen sind von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1; \qquad (3.5.24)$$

und bestehen somit aus komplexen Zahlen a, b, c, d, mit zwei Bedingungen. Diese 6 Parameter korrespondieren zu den 3 Rotationswinkeln und den 3 Geschwindigkeiten der allgemeinen Lorentztransformationen. Da zukunftsweisende, zeitartige Vektoren zukunftsweisend bleiben sollen, handelt es sich um die eigentliche-orthochrone Lorentz-Gruppe. Die $SL(2, \mathbb{C})$ ist dadurch zweifach Überlagernde der SO(1,3). Diese sogenannte Weyl-Darstellung hat den Nachteil, dass die Raumspiegelung, dh. die Paritätsoperation im Allgemeinen keine Darstellung in $SL(2, \mathbb{C})$ findet, da unter Raumspiegelung der Darstellungsraum verlassen wird. Dieses Problem löst der Übergang zur 4-dimensionalen Dirac-Notation. Dh. der Übergang zu der allgemeinen Darstellung $D^{Dirac} = D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ auf dem 4-dimensionalen Raum der Dirac- oder Viererspinoren. D^{Dirac} ist dann also eine Darstellung der Gruppe Spin(1,3), welche isomorph zur $SL(2, \mathbb{C})$ ist.

Das Gefundene soll nun kurz zusammengefasst werden. Es gibt 2-komponentige Spinoren, welche eine wohldefinierte Transformationen (3.4.1) unter SO(3)-Rotationen besitzen. Für allgemeine Lorentztransformationen gibt es hingegen zwei verschiedene 2-komponentige Spinoren. Die ungepunkteten transformieren unter der Fundamentaldarstellung $(\frac{1}{2}, 0)$ mit (3.5.18), die gepunkteten unter der Fundamentaldarstellung $(0, \frac{1}{2})$ mit (3.5.20). Ihre Verknüpfung ist eine Darstellung der Gruppe Spin(1, 3) und kann über Elemente der Dirac-Algebra Cl(1,3), also durch die Dirac- bzw. Pauli-Matrizen gebildet werden. Grob gesprochen ist die Dirac-Gleichung dann eine Beziehung zwischen diesen Spinoren [14]. Im folgenden Kapitel soll sie, auf dieser Grundlage aufbauend, hergeleitet werden.

4 Die Dirac-Gleichung

Der Ablauf aller physikalischen Vorgänge, dh. der Naturgesetze, ist laut *Relativitätsprinzip* in allen Inertialsystemen gleich. Demnach müssen die sie beschreibenden Gleichungen invariant unter Lorentztransformationen formuliert werden (Lorentzkovariant (vgl. Einleitung von Anhang A). Die im Jahre 1926 von Erwin Schrödinger vorgeschlagene wellentheoretische Beschreibung von Teilchen konnte eine solche Bedingung nicht erfüllen und schied somit als Kandidat für eine relativistische Wellengleichung aus. Ein erster Versuch eine lorentzkovariante Gleichung einzuführen wurde zwar noch von Schrödinger selbst getätigt, jedoch kurze Zeit darauf von ihm verworfen. Klein und Gordon vollzogen dann denselben Schritt, indem sie über das Korrespondenzprinzip, aus der Energie-Impulsbeziehung

$$p^{\mu}p_{\mu} = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = m^2$$
, mit $p_0 = E \to i\hbar\partial_t$, $\boldsymbol{p} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla}$, (4.0.1)

die quantenmechanische Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\Box + m^2)\psi = 0, \qquad (4.0.2)$$

herleiteten, wobei

$$\hbar = c = 1$$
 und $\Box = (\partial_t^2 - \nabla^2)$ (4.0.3)

gilt. Die Linearität der Zeit ist für die Schrödingergleichung charakteristisch, da aus ihr die Möglichkeit der Zeitentwicklung erwächst. Die relativistisch implizierte Symmetrie zwischen $E = p_0$ und den p_i 's in (4.0.1) führt dann aber auf den Umstand, dass auch die räumlichen Variablen erster Ordnung sein müssen. Daher forderte Dirac dieselben Bedingungen für eine relativistische Gleichung [15], was in einem Differentialoperator erster Ordnung resultierte.

$$\partial = \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \,, \tag{4.0.4}$$

mit Koeffizienten γ^{μ} , so dass

$$\Box \psi = \partial (\partial \psi) , \qquad (4.0.5)$$

gilt, dh. die "Wurzel" des d'Alambert-Operators gebildet wird. Um eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung zu finden, muss dann zunächst die Dirac-Gleichung gelöst werden, welche im Folgenden mit den Mitteln des vorigen Kapitels hergeleitet werden soll, wobei der gewählte Weg von Diracs ursprünglichem abweicht und in Anlehung an [14] erfolgt. Wie oben schon geschehen, wird die einsteinsche Summenkonvention von nun an wieder Verwendung finden.

4.1 Die Dirac-Gleichung im Minkowski-Raum

Zunächst wird die Paritätsoperation eingeführt, unter welcher das Vorzeichen eines Lorentz-Boosts wechselt: $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$. Dann ändern auch die Erzeugenden K ihr Vorzeichen, $K \to -K$ und verhalten sich damit wie ein Vektor, während es bei den Erzeugenden J gleich bleibt, $J \to +J$ und diese sich somit wie Pseudovektoren verhalten, was von Drehimpulsen unter Paritättransformation zu erwarten ist. Die linke und rechte Fundamentaldarstellung, (j, 0) und (0, j), vertauschen also unter Parität und dadurch auch die links- und rechtshändigen Spinoren $\Psi_L \leftrightarrow \Psi_R$. Dann ist es nicht mehr ausreichend, die beiden 2-komponentigen Spinoren Ψ_L und Ψ_R getrennt zu betrachten und der 4-komponentige *Dirac-Spinor*

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

wird eingeführt. Unter Transformation der Produktgruppe der beiden Fundamentaldarstellungen ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i\frac{\sigma}{2}(\theta - i\varphi)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\sigma}{2}(\theta + i\varphi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_R & 0 \\ 0 & A_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix}$$
(4.1.2)

und die Paritätsoperation erfolgt über

$$\begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} .$$
(4.1.3)

Der 4-komponentige Spinor ist dann eine irreduzible Darstellung von SO(1,3), erweitert durch Parität bzw. eine Darstellung von Spin(1,3). Die Darstellung (4.1.2) ist allerdings, wie im zuvorigen Kapitel schon festgestellt, nicht unitär, da die Erzeugenden T^+ und T^- nicht hermitesch sind. Üblicherweise ist aber gerade die Quantenmechanik an unitären Darstellungen von Symmetriegruppen interessiert, da nur diese die Übergangswahrscheinlichkeit zweier, in verschiedenen Bezugssystemen betrachteten, Zustände erhält. Dieses Problem ist auf die nicht-Kompaktheit der Lorentz-Gruppe zurückzuführen. Da die Parameter der Lorentz-Boosts, die Geschwindigkeiten, Werte des offenen Intervalls v/c = 0 bis v/c = 1 annehmen, die Parameter der Rotationen hingegen von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$ laufen und diese Punkte miteinander identifiziert werden, ergibt sich anschaulich aus der Geraden ein Kreis. Der Raum der Rotationen ist also endlich, der Raum der Gruppe SO(1,3) dagegen unendlich und es folgt, dass SO(1,3) nicht kompakt ist. Für ein volles Verständnis dieser und anderer Eigenschaften des Spins bzw. der Spinoren, bedarf es einer weiterführenden Diskussion der Poincaré-Gruppe, die in dieser Arbeit jedoch nicht gegeben werden soll (vgl. z.B. [16]).

Die Transformationen (4.1.2) werden nun auf den Fall der Lorentz-Boosts beschränkt, dh. $\theta = 0$. Dann ergibt sich für den rechtshändigen Spinor

$$\Psi_R \to e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varphi}}\Psi_R = [\cosh(\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2}) + \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\sinh(\frac{\boldsymbol{\varphi}}{2})]\Psi_R, \qquad (4.1.4)$$

wobei $\hat{\boldsymbol{n}}$ ein Einheitsvektor in Richtung des Lorentz-Boosts ist. Der anfängliche Spinor soll ein Teilchen in Ruhe beschreiben, $\Psi_R(0)$, der transformierte Spinor ein Teilchen mit Impuls \boldsymbol{p} , $\Psi_R(\boldsymbol{p})$. Mit den Identitäten $\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh(x) \cosh(x)$ und $\cosh(2x) = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$, ergibt sich aus Gleichung (3.5.3) $\cosh(\varphi/2) = [(\gamma + 1)/2]^{\frac{1}{2}}, \sinh(\varphi/2) = [(\gamma - 1)/2]^{\frac{1}{2}}$ und (4.1.4) wird zu:

$$\Psi_R(\boldsymbol{p}) = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right] \Psi_R(0) \,. \tag{4.1.5}$$

Für ein Teilchen mit Gesamtenergie E, Masse m und Impuls p gilt nach der speziellen Relativitätstheorie $E = \gamma mc^2$. Umstellen ergibt $\gamma = E/mc^2$ und für große Geschwindigkeiten und (c = 1) ist $E - m \simeq 0$. Einsetzen in (4.1.5) liefert:

$$\Psi_R(\boldsymbol{p}) = \frac{E + m + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{[2m(E+m)]^{\frac{1}{2}}} \Psi_R(0)$$
(4.1.6)

und für den linkshändigen Spinor analog

$$\Psi_L(\mathbf{p}) = \frac{E + m - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{[2m(E+m)]^{\frac{1}{2}}} \Psi_L(0) \,. \tag{4.1.7}$$

Desweiteren besitzt ein Teilchen in Ruhe keinen bestimmten Drehsinn (Rechtsschraube bzw. Linksschraube), der Spin kann somit weder als links-, noch rechsthändig identifiziert werden. Daraus folgt $\Psi_L(0) = \Psi_R(0)$. Einsetzen und Umformen lässt aus (4.1.6) und (4.1.7)

$$\Psi_R(\boldsymbol{p}) = \frac{E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{m} \Psi_L(\boldsymbol{p}) \quad \text{bzw.} \quad \Psi_L(\boldsymbol{p}) = \frac{E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{m} \Psi_R(\boldsymbol{p}) \tag{4.1.8}$$

werden. Diese beiden Gleichungen können auch in Matrixform bezüglich des 4-komponentigen Spinors (4.1.1) geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \\ p_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix} = 0.$$
(4.1.9)

Es werden noch die $4\times 4\text{-}\mathrm{Matrizen}$

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^{i}\\ \sigma^{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3$$
(4.1.10)

eingeführt. In Kapitel 3 Unterabschnitt 3.3.3 wurden ähnliche Objekte schon betrachtet und etwas vorschnell Dirac-Matrizen genannt. Die Namensgebung erscheint im aktuellen Kontext jedoch wesentlich sinnvoller, da im nächsten Schritt die Dirac-Gleichung abgeleitet und die Matrizen (4.1.10) dabei behilflich sein werden. Die Unterschiede in den Darstellungen sind einzig durch die gewählte Basis bedingt. Auch die Matrizen (4.1.10) erfüllen die Dirac-Algebra Cl(1,3)und ihre Darstellung nennt sich *chirale*- oder *Weyl-Darstellung*. Werden sie nun in Gleichung (4.1.9) eingesetzt, ergibt sich

$$(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m) = 0, \qquad (4.1.11)$$

wobei $p_{\mu} = (E, -\mathbf{p})$ ist und somit $\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i = \gamma^{\mu} p_{\mu}$ gilt. Dann erhält man in Impulsdarstellung

$$(\gamma^{\mu}p_{\mu} - m)\Psi(p) = 0 \tag{4.1.12}$$

und mit Hilfe des Impulsoperators $i\partial_{\mu}$ die etwas geläufigere Variante in Ortsdarstellung:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x) = 0. \qquad (4.1.13)$$

Dies ist die **Dirac-Gleichung** für massive Spin-(1/2) Teilchen. Für ein massenloses Teilchen entkoppelt die Gleichung (vgl. z.B. (4.1.9)) in zwei 2-komponentige Spinorgleichungen

$$(p_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}) \Psi_L(\boldsymbol{p}) = 0 (p_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}) \Psi_R(\boldsymbol{p}) = 0,$$

$$(4.1.14)$$

Weyl-Gleichungen genannt, wobei $\Psi_L(\mathbf{p})$ und $\Psi_R(\mathbf{p})$ auch als *Weyl-Spinoren* bezeichnet werden. Da für ein masseloses Teilchen $p_0 = |\mathbf{p}|$ gilt, reduzieren sie sich auf

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \Psi_L = -\Psi_L \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \Psi_R = \Psi_R.$$
 (4.1.15)

Der Operator $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}$ misst dabei die auf die Richtung des Impulses projezierte Komponente des Spins, genannt *Helizität*. Die Weyl-Spinoren sind also Eigenwerte der Helizität, wobei der linkshändige (rechtshändige) Spinor zu negativer (positiver) Helizität korrespondiert. Die Weyl-Darstellung ergibt sich durch einen unitären Basiswechsel aus der Standard- oder Dirac-Darstellung

$$\gamma_{\text{Weyl}}^{i} = U \gamma_{\text{Dirac}}^{i} U^{-1} \quad \text{mit} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
(4.1.16)

Spinortransformationen transformieren nur in dieser Basis die ersten und die letzten beiden Komponenten des Dirac-Spinors getrennt. Eine weitere Darstellung ist die Majorana-Darstellung in der alle Gamma-Matrizen imaginär werden. Die Dirac-Gleichung ist dann ein reelles Differentialgleichungssystem.

Die Dirac-Gleichung beschreibt die Wahrscheinlichkeitsamplitude eines einzelnen Spin-(1/2) Teilchens und baut somit eine Ein-Teilchen Theorie auf. Die Wellenfunktionsinterpretation kann die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen nicht befriedigend beschreiben, wodurch die Erweiterung zu einer Dirac-Gleichung für Felder unabdingbar wird. Mit der hier hergeleiteten Gleichung (4.1.13) ist es möglich, das magnetische Moment des Elektrons sehr genau zu bestimmen und die Feinstruktur vieler atomarer Spektrallinien zu erklären [16]. Desweiteren ergibt sich auf natürliche Weise eine Bescheibung des Spins¹. Diracs ursprüngliches Ziel war es jedoch, die Probleme der Klein-Gordon-Gleichung zu lösen. Diese kann zwei Defekte nicht beheben: die Wahrscheinlichkeitsdichte ist nicht positiv definit und negative Eigenzustände des zu beschreibenden Teilchens treten auf. Ersteres kann von der Dirac-Gleichung gelöst werden, zweiteres hingegen nicht. Ein Blick auf (4.1.12) und die Relation $(\gamma^0)^2 = 1$ zeigen, dass ein Dirac Teilchen in Ruhe den beiden Gleichungen

$$\gamma^0 p_0 \Psi = m \Psi \quad \text{und} \quad p_0 \Psi = m \gamma^0 \Psi \tag{4.1.17}$$

gehorcht. Die Eigenwerte von γ^0 sind +1 (zweimal) und -1 (zweimal), dh. es gibt zwei Lösungen mit positiver und zwei Lösungen mit negativer Energie. Durch Ausschreiben der vier Komponenten aus (4.1.12) kann gezeigt werden, dass die Energieeigenwerte dann

$$E = +(m^{2} + p^{2})^{\frac{1}{2}} \text{ zweimal}$$

$$E = -(m^{2} + p^{2})^{\frac{1}{2}} \text{ zweimal}, \qquad (4.1.18)$$

ergeben (vgl. [14]). Zu den beiden Lösungen mit positiver Energie korrespondieren dann zwei Spin Zustände. Teilchen mit negativer Energie wurden bis zur Herleitung der Gleichung jedoch nie beobachtet und eine Welt mit Teilchen, deren Energien nach oben und nach unten unbeschränkt sind, wäre instabil, daher postulierte Dirac, das Vakuum sei ein sogenannter Dirac-See. In einem solchen ist jeder denkbare Zustand mit negativer Energie schon besetzt, so dass weitere Elektronen nur positive Energien annehmen können. Wird genügend Energie hinzugefügt, dh. mindestens die Ruheenergie zweier Elektronen, kann einem Elektron des Sees positive Energie verliehen werden. Das entstehende Loch verhält sich dann wie ein Zustand mit der restlichen, ebenfalls positiven Energie und der fehlenden, entgegengesetzten Ladung. Dirac selbst dachte zunächst, es handele sich hierbei um Protonen, obwohl seine eigene Gleichung sogar Teilchen mit einer Masse äquivalent zu der des Elektrons vorraussagte. Die Existenz von Antiteilchen und die Paarerzeugung von Elektron-Positron-Paaren wurde aber nur ein Jahr später beobachtet. Dirac musste seine Annahme daher verwerfen und die Aussagen der obigen Gleichung wurden auf eindrückliche Art verifiziert. Die Vorstellung des Dirac-Sees ist heute allerdings durch die Feynman-Stückelberg-Interpretation ersetzt, welche die Dirac-Gleichung, wie oben erwähnt, als Gleichung für ein Quantenfeld $\Psi(x)$ deutet. Mathematisch wird das obige Phänomen dann über einen Operator ausgedrückt, der in den quantenmechanischen Zuständen Teilchen oder Antiteilchen erzeugt oder vernichtet. So können mit Hilfe der Quantenfeldtheoretischen Feynman-Diagramme viele Probleme aus der Elementarteilchenphysik interpretiert und qualitativ berechnet werden. Für eine Beschreibung der Dirac-Gleichung in gekrümmter Raumzeit wird jedoch weiterhin die hergeleitete Ein-Teilchen Theorie verwendet.

4.2 Die Dirac-Gleichung in gekrümmter Raumzeit

An Stelle des Minkowski-Raumes wird jetzt eine Raumzeit M, dh. eine vierdimensionale orientierte und zeitorientierte Lorentz- Mannigfaltigkeit, betrachtet. In Kapitel (2) wurden Tetraden als Vektorfelder offener Mengen $U, V \subseteq M$ eingeführt, wobei eine Transformation von einer offenen Menge in eine andere in den Überlappungsgebieten der beiden mittels einer lokalen Lorentztransformation erfolgte. Gesucht ist nun das Analogon eines 4-komponentigen bzw. Dirac-Spinors des Minkowski-Raums in einer gekrümmten Raumzeit. In der Disskussion solcher Spinoren im Minkowski-Raum wurden zu einer Lorentztransformation Λ zwei Matrizen $A_{L/R}$ der Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ bzw. deren Verknüpfung mit Spin(1, 3) assoziiert. Dort traten keine Probleme auf, da

¹Wenn Dirac's ursprünglichem Weg gefolgt wird. In dieser Arbeit wurde mit Darstellungen der Spin-Gruppe gearbeitet und somit schon vom Phänomen des Spins ausgegangen.

es sich um eine konstante, weil globale Matrix Λ handelte. Im aktuellen Kontext sind die $\Lambda(x)$'s aber nur lokal definiert und somit korrespondieren auch nur lokale A(x) aus $SL(2, \mathbb{C})$ zu diesen. Da jeder Spinor als Tensor darstellbar ist, gilt natürlich das Tensortransformationsgesetz (2.2.4) für die LLT's,

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = \Lambda(x)\Psi. \tag{4.2.1}$$

Für die beiden lokalen Fundamentaldarstellungen ist dies aber nicht ohne Weiteres gegeben. Sollte es dennoch möglich sein, wird von einem *Lift* der Strukturgruppe des Tangentialbündels $TM \in M$ aus der Gruppe SO(1,3) in die Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ gesprochen. M besitzt dann eine sogenannte Spin-Struktur. Das Konzept soll nun vertieft werden, um das Spinor-Bündel einzuführen.

4.2.1 Das Dirac-Spinor-Bündel

Es wird wieder die Raumzeit M mit der Strukturgruppe SO(1,3) herangezogen. P sei ein Punkt in einer offenen Umgebung U mit Tetradenfeld $\hat{e}_{(a)}$. Die Tetrade $\hat{u}(P) = \hat{e}_{(a)}(P)$ im Punkt P wird jetzt stetig in U entlang einer geschlossenen Kurve C = C(t), im Einheits-Intervall I = [0, 1]transportiert, bis sie an ihren Ausgangsort $\hat{u}(P)$ zurückgekehrt ist. Verschiedene Punkte $\hat{u}(C(t))$ der Kurve können nun mit dem Ausgangspunkt $\hat{u}(C(0)) = \hat{u}(P)$ verglichen werden, indem das Tetradenfeld $\hat{e}(P)$ am Punkt P mit allen anderen Tetradenfeldern der Umgebung U identifiziert, dh. in sie transformiert wird. Dies erfolgt aber über LLT's. Durch den Vergleich von $\hat{u}(C(t))$ mit $\hat{e}_{(a)}$ an der Stelle C(t), ergibt sich $\hat{u}(C(t)) = \hat{e}_{(a')}(C(t)) = \Lambda^a{}_{a'}\hat{e}_{(a)}(C(t))$ und die geschlossene Kurve $t \mapsto \Lambda(t)$ liegt somit in SO(1,3). Zu der resultierenden Kurve korrespondiert eine zweifach überlagernde Kurve C aus $SL(2,\mathbb{C})$. Dann gibt es zwei Elemente A und B (wobei B = -A und A = I, also die Einheitsmatrix gewählt werden kann) aus $SL(2,\mathbb{C})$, die beide auf das Element $\Lambda^a_{a'}$ aus SO(1,3) abbgebildet werden. Das Bild der Verbindung von I nach -Idurch die Kurve \tilde{C} liegt wieder in SO(1,3) und ist gerade die oben betrachtete, geschlossene Kurve C(t). Topologisch ist dies äquivalent zu einer Rotation von 2π in SO(1,3), was damit auch für die mit dieser Kurve verbundene Tetrade gilt. Um jedoch wieder zum Ausgangspunkt der Kurve C in $SL(2,\mathbb{C})$ zu gelangen, bedarf es einer weiteren Rotation, in der Summe also 4π . Unglücklicherweise ist dieses Resultat aber nicht eindeutig und von der Wahl der Tetradenfelder abhängig [17] und so wird ein Tetraden-Bündel¹ gesucht, das sich speziell unter Darstellungen von $SL(2,\mathbb{C})$ transformiert. Besitzt M eine Spin-Struktur, ist $SL(2,\mathbb{C})$ Strukturgruppe und Tetraden \hat{u} können um beliebige geschlossene Kurven \tilde{C} in M transportiert werden, so dass bei Rückkehr zum Ausgangspunkt zwischen einer geraden und ungeraden Anzahl von Rotationen unterschieden werden kann. Es wird dadurch ein neuer Aspekt der Tetraden eingeführt der auf den oben erläuterten Begriff orientation-entanglement Bezug nimmt und gelegentlich die Bezeichnung spin-entanglement erhält [18]. Mit ihrem spin-entanglement spezifizierte Tetraden können Spin-Rahmen genannt werden, sollen hier aber ihre alten Namen beibehalten. Analog zu Kapitel 3 können dann 2-komponentige Spinoren über die Darstellungen A von $SL(2,\mathbb{C})$ definiert werden, deren disjunkte Vereinigung auf ganz M das sogenannte **Spinor-Bündel** ist. Es wird von nun an immer eine Raumzeit M mit Spin-Struktur gefordert.

Die LLT's sind jetzt also die Transformationen des Tetraden-Bündels und die Matrizen A(x) die des 2-komponentigen Spinor-Bündels. Durch die Verknüpfung der beiden Darstellungen von A(x) ergibt sich das mit $\mathfrak{S}M$ bezeichnete, 4-komponentige **Dirac-Spinor-Bündel** mit Transformationen der Gruppe **Spin**(1,3). Diese lässt sich somit auch

$$Spin(1,3) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & A^{\dagger - 1} \end{pmatrix} \middle| A \in SL(2,\mathbb{C}) \right\}$$
(4.2.2)

schreiben. Die Elemente² Ψ des Dirac-Spinor-Bündels dienen dann als die "Wellenfunktionen"

¹ Analog zum Tangentialbündel, nur für Tetradenfelder.

₂In der Theorie der Faserbündel eigentlich der Schnitt.

der Quantentheorie.

Für die Konstruktion des Diracoperators ∂ in gekrümmter Raumzeit bedarf es einer kovarianten Ableitung. Der in Anhang A eingeführte Levi-Civita-Zusammenhang wird hier aber nicht verwendbar sein, da $\mathfrak{S}M$ und TM verschiedene Bündel über M sind. Es bedarf also eines Zusammenhangs in $\mathfrak{S}M$, der über eine zweifach überlagernde Darstellung ρ von SO(1,3) mit TMverbunden ist.

4.2.2 Der Spin-Zusammenhang

Die Raumzeit M besitzt eine Spin-Struktur und ein Zusammenhang für das Dirac-Spinor-Bündel $\mathfrak{S}M$ der Wellenfunktionen Ψ mit der Darstellung:

$$\rho: SL(2, \mathbb{C}) \longrightarrow Spin(1, 3) \tag{4.2.3}$$

ist gesucht. Dann muss zunächst ein Zusammenhang des Tangentialbündels mit $SL(2, \mathbb{C})$ als Strukturgruppe konstruiert werden. Dazu ein kurzer Einschub bezüglich allgemeiner Zusammenhänge in Tangetialbündeln.

Zusammenhänge in Tangentialbündeln

Ein Zusammenhang in einem Tangetialbündel TM ordnet jeder offenen Umgebung $U \subseteq M$ eine \mathfrak{g} -wertige Linearform $\omega_U \operatorname{zu}^1$, mit \mathfrak{g} als Lie-Algebra von TM [17]. In Kapitel 2 wurde die Linearform ω_U schon für den Levi-Civita-Zusammenhang eingeführt und bildete dort eine Matrix aus Linearformen (vgl. (2.3.13)). Bei der Wirkung auf tensorielle Objekte wie z.B. Vektoren entsteht dann eine Matrix von vektorwertigen Linearformen:

$$\omega^a_{\ b} X^b = \omega^a_{\mu\ b} X^b dx^\mu \,. \tag{4.2.4}$$

Das kovariante Differential² lautet damit:

$$\nabla_U X_U = dX_U + \omega_U X_U \tag{4.2.5}$$

und in jeder Überlappung der Umgebungen $U, V \in M$ gilt:

$$\nabla_V X_V = C_{VU} \nabla_U X_U, \qquad (4.2.6)$$

wobei C_{VU} für die jeweilige Transformationsmatrix zwischen den beiden Umgebungen steht. $\rho: G \to GL(N)$ ist eine Darstellung der Strukturgruppe von TM. Da \mathfrak{g} Lie-Algebra von TMist, bildet sie auch den Tangentialraum zur Mannigfaltigkeit G im Punkt P und $\mathfrak{gl}(N)$ den Tangentialraum zu GL(N) im Punkt $\rho(P) = \tilde{P}$. Eine lineare Transformation $\rho_*: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(N)$ der Lie-Algebren wird dann mit ρ_* bezeichnet. Für $M \in \mathfrak{g}$ und $\tilde{M} \in \mathfrak{gl}(N)$ werden die 1-parametrigen Untergruppen über die Exponentialabbildung geformt, so dass $\exp(\theta M)$ und $\exp(\theta \tilde{M})$ gelten. Da ρ ein Homomorphismus ist, ergibt das Bild $\rho[\exp(\theta M)]$ eine 1-parametrigen Untergruppe von GL(N) für die ja genau $\exp(\theta \tilde{M})$ gilt. Im Punkt \tilde{P} ist aber $\rho_*(M)$ tangential zu $\rho[\exp(\theta M)]$ und daher folgt $\tilde{M} = \rho_*(M)$. Durch Einsetzen erhält man:

$$\rho[\exp(\theta M)] = \exp(\theta \rho_*(M)). \qquad (4.2.7)$$

Anstatt eine Darstellung der Strukturgruppe über eine 1-parametrige Untergruppe spezieller Erzeugender zu konstruieren, kann also auch einfach die Lie-Algebra durch eine lineare Transformation gewechselt werden und das Ergebnis bildet dann über die Exponentialabbildung automatisch eine Strukturgruppe von TM. Daher soll TM_{ρ} jetzt genau über solch eine Darstellung

 $_1$ Das U steht für die Existenz in der offenen Umgebung.

 $_2$ Ergibt sich durch Kontraktion der kovarianten Ableitung mit der Differential- bzw. Linearform, also $\nabla = \nabla_{\mu} dx^{\mu}$

 $\rho: G \to \mathbf{GL}(N)$, das zu TM assoziierte Tangentialbündel sein (dieser Platz wird später vom Spinor-Bündel eingenommen). Ein zu TM_{ρ} korrespondierender Zusammenhang Γ in der offenen Umgebung U wird damit

$$\Gamma_U \coloneqq \rho_* \omega_U \tag{4.2.8}$$

geschrieben, der durch Folgendes definiert ist: Für einen Tangentialvektor $X \in TM$ ist $\omega_U(X) \in \mathfrak{g}$ und damit $\rho_*[\omega_U(X)] \in \rho_*(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(N)$. Mit der Beziehung

$$[\rho_*\omega_U](\boldsymbol{X}) := \rho_*[\omega_U(\boldsymbol{X})], \qquad (4.2.9)$$

wird aus Γ , mit unterdrückten Tetradenindizes:

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma(dx_{\mu}) = (\rho_*\omega)_{\mu} = (\rho_*\omega)(dx_{\mu}) = \rho_*\omega_{\mu}.$$
(4.2.10)

Definition 4.2.1 Γ_{μ} definiert einen Zusammenhang für das Bündel TM_{ρ} , so dass dieses über die Darstellung ρ mit dem Bündel TM assoziiert wird.

Das kovariante Differential für ein assoziiertes Bündel wird damit zu:

$$\nabla \Psi = d\Psi + (\rho_* \omega) \Psi, \quad \text{mit} \quad \nabla_V \Psi_V = \rho(C_{UV}) \nabla_U \Psi_U \tag{4.2.11}$$

und die kovariante Ableitung schreibt sich [17]:

$$\nabla_{\mu}\Psi = \partial_{\mu}\Psi + (\rho_*\omega_{\mu})\Psi. \qquad (4.2.12)$$

Mit diesen allgemeinen Aussagen soll nun zum Zusammenhang des Tangentialbündels mit $SL(2, \mathbb{C})$ als Strukturgruppe zurückgekehrt werden.

Wieder ist ω die Zusammenhangsform und die zu betrachtenden Algebren sollen $\mathfrak{so}(1,3)$ und $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ sein. Für einen Tangentialvektor $\mathbf{X} \in TM$ bildet $\omega_U(\mathbf{X}) \in \mathfrak{so}(1,3)$ dann die Lie-Algebra der eigentlichen-orthochronen Lorentz-Gruppe. Da $\Lambda : \mathbf{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathbf{SO}(1,3)$ eine 2 : 1-Abbildung ist, existiert zu $\omega_U(\mathbf{X}) \in \mathfrak{so}(1,3)$ eine Zusammenhangsform $\omega'(\mathbf{X}) \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, so dass

$$\Lambda_* \omega'_U(\boldsymbol{X}) = \omega_U(\boldsymbol{X}) \tag{4.2.13}$$

gilt (Der Vektor ist zweifach überlagert, aber nur eine der beiden Überlagerungen hat ihren Ursprung in $I \in SL(2, \mathbb{C})$). Hierbei stellen die Λ_* 's infinitesimale Lorentztransformationen dar. Die so definierten $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -wertigen, lokalen Linearformen ω'_U bilden die Zusammenhangsformen des Tangentialbündels TM der Raumzeit M deren Struktur-Gruppe $SL(2, \mathbb{C})$ ist. Der Beweis wird darüber erbracht, Λ_* auf das Transformationsgesetz (2.3.1) in Kapitel 2 anzuwenden, da Λ_* ja 1:1 ist. Dazu wird allerdings auf die Literatur verwiesen (vgl. z.B. [17] S. 484).

Es gibt nun also einen Zusammenhang des Tangentialbündels TM mit Strukturgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ und eine Darstellung ρ dieser Gruppe durch 4×4 -Matrizen aus Spin(1,3) (vgl (4.2.2)). Das 4komponentige Dirac-Spinor-Bündel $\mathfrak{S}M$ ist über diese Darstellung ρ mit dem Tangentialbündel verbunden. Es muss jetzt noch ein assoziierter Zusammenhang Γ gefunden werden welcher der Relation (4.2.8) gehorcht.

Werden dazu die beiden Matrizen (3.5.11) aus Kapitel 3 und (2.3.13) aus Kapitel 2 nebeneinander geschrieben

$$M = \epsilon_{ijk} M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{01} & 0 & -\epsilon_{12} & -\epsilon_{13} \\ \epsilon_{02} & \epsilon_{12} & 0 & -\epsilon_{23} \\ \epsilon_{03} & \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ \omega_{01} & 0 & -\omega_{12} & -\omega_{13} \\ \omega_{02} & \omega_{12} & 0 & -\omega_{23} \\ \omega_{03} & \omega_{13} & \omega_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.14)$$

fällt auf, dass die Zusammenhangsformen ω_{μ} des Levi-Civita-Zusammenhangs durch die schon gefundenen infinitesimalen Lorentztransformationen $\Lambda_* = M$ ausgedrückt werden können, was ja genau durch (4.2.13) gefordert wird. Die Kommutatorrelationen der Rotations- und Boost-Erzeugenden werden aber von den Pauli-Matrizen erfüllt, so dass gilt $(1/2)\sigma^a\sigma^b = M_{ab}$ und ω'_{μ} lässt sich somit schreiben als:

$$\omega'_{\mu} = \frac{1}{2} \sigma^a \sigma^b \omega_{\mu ab} \,. \tag{4.2.15}$$

Die Darstellungen $\rho : SL(2, \mathbb{C}) \to Spin(1, 3)$ über komplexe 4×4 Matrizen sind von der Art (4.2.2) [17]:

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & A^{\dagger - 1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho_*(h) = \begin{pmatrix} h & 0\\ 0 & -h^{\dagger} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad h \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \,. \tag{4.2.16}$$

Damit kann nun der Zusammenhang $\Gamma_{\mu} = \rho_* \omega'_{\mu}$ berechnet werden. Einsetzen liefert:

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{2} \omega_{\mu a b} \begin{bmatrix} \sigma^{a} \sigma^{b} & 0\\ 0 & -\sigma^{b} \sigma^{a} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \omega_{\mu 0 \beta} \begin{bmatrix} \sigma^{\beta} & 0\\ 0 & -\sigma^{\beta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \omega_{\mu \alpha \beta} \begin{bmatrix} \sigma^{\alpha} \sigma^{\beta} & 0\\ 0 & -\sigma^{\beta} \sigma^{\alpha} \end{bmatrix}.$$
(4.2.17)

Da aber mit den Dirac-Matrizen γ^i gilt:

$$\gamma^{0}\gamma^{\beta} = \begin{bmatrix} \sigma^{\beta} & 0\\ 0 & -\sigma^{\beta} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = \begin{bmatrix} \sigma^{\alpha}\sigma^{\beta} & 0\\ 0 & -\sigma^{\beta}\sigma^{\alpha} \end{bmatrix}, \quad (4.2.18)$$

ergibt sich $\Gamma_{\mu} = (1/2)\gamma^{0}\gamma^{\beta}\omega_{\mu0\beta} + (1/2)\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\omega_{\mu\alpha\beta}$. Durch Zusammenfassen erhält man den **Spin-Zusammenhang** im Dirac-Spinor-Bündel:

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{4} \gamma^a \gamma^b \omega_{\mu a b} = \frac{1}{8} \omega_{\mu a b} [\gamma^a, \gamma^b], \qquad (4.2.19)$$

da ja $\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$ gilt.

4.2.3 Der Dirac-Operator in gekrümmter Raumzeit

Wird Γ_{μ} in Gleichung (4.2.12) eingesetzt, ergibt sich für die kovariante Ableitung im Spinor-Bündel:

$$\nabla_{\mu}\Psi = \partial_{\mu}\Psi + \frac{1}{8}\omega_{\mu ab}[\gamma^{a},\gamma^{b}]\Psi. \qquad (4.2.20)$$

Der Dirac-Operator in gekrümmter Raumzeit ist dann von folgender Form:

$$\gamma^{\mu}(\partial_{\mu} + \frac{1}{8}\omega_{\mu ab}[\gamma^{a}, \gamma^{b}]) = \partial \!\!\!/ + \gamma^{\mu}\Gamma_{\mu} = D \!\!\!/, \qquad (4.2.21)$$

wobei die Dirac-Matrizen nur lokale Gültigkeit besitzen und ihre Kovarianz dann über $\gamma^{\mu} = e^{\mu}{}_{a}\gamma^{a}$ mit den Tetradenfeldern $e^{\mu}{}_{a}(x)$ gewährleistet ist. Ein Vergleich mit Gleichung (4.1.13) ergibt:

$$(i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu} - m)\Psi(x) = 0$$
(4.2.22)

Dies ist die **Dirac-Gleichung in gekrümmter Raumzeit** (vgl. [17], [19], [20], [21]). Eine noch kompaktere Version schreibt sich:

$$(i\not\!\!\!D - m)\Psi(x) = 0. (4.2.23)$$

Wie oben schon erwähnt, erfüllen natürlich auch die allgemein kovarianten γ 's die Dirac-Algebra (3.3.23):

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \,. \tag{4.2.24}$$

Dabei stellt $g^{\mu\nu}$ eine allgemeine Metrik dar. Zur Bestimmung eines Hamiltonoperators kann die Gleichung (4.2.22), durch eine Überschiebung des Spin-Zusammenhanges mit den ortsabhängigen Dirac-Matrizen, in Schrödingerform gebracht werden. Eine Untersuchung von Spin-(1/2) Teilchen in speziellen und allgemeinen Raumzeiten ist somit ermöglicht. Die darauf folgende Frage lautet dann: Welche Vorhersagen liefert solch eine Theorie? Ein Ausblick wird in der anschließenden Diskussion gegeben.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, eine allgemein kovariante Gleichung für Spin-(1/2) Teilchen zu finden. Der Spin ist ein quantentheoretisches Phänomen und wird mathematisch über Spinoren beschrieben, deren Ursprünge im euklidischen- und Minkowski-Raum liegen. Die in der ART verwendete, vierdimensionale, orientierte und zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit verhält sich lokal genau wie der Minkowski-Raum. Die auf dieser Raumzeit definierten Tensoren sind zur Modelierung des Spins dennoch nicht geeignet, da ihre Transformationen eine Darstellung von $GL(n,\mathbb{R})$ bilden, was für Spinoren nicht gilt. Daher wurden an jedem Punkt der Raumzeit orthonormale Tetraden mit lokaler SO(1,3) Symmetrie eingeführt, so dass Spinoren dann in diesen Bezugssystemen definiert werden konnten. Da aber eine Aufspaltung von SO(1,3) in zwei Fundamentaldarstellungen aus der Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$ existiert und diese inäquivalent sind, bedurfte es zur Implementierung von Spinoren in gekrümmter Raumzeit noch einer zusätzlichen Struktur der Mannigfaltigkeit. Diese wurde Spin-Struktur genannt und gewährleistete, durch ihre Funktion $SL(2,\mathbb{C})$ als Strukturgruppe des Tangentialbündels zu etablieren, die Definition sogenannter Spin-Rahmen. Da diese nach einer geraden oder ungeraden Anzahl von Rotationen klassifiziert werden konnten, ließen sich von dort an auch 2-komponentige Spinoren und somit das Spinor-Bündel definieren. Durch die Verknüpfung der beiden Darstellungen ergab sich das 4-komponentige Dirac-Spinor-Bündel mit Transformationen der Gruppe Spin(1,3), die über den geraden Teil $Cl^{0}(1,3)$ der Clifford-Algebra Cl(1,3) definiert wurde und welche die Pauli- und Dirac-Matrizen auch erfüllten. Um Verbindungen zwischen den einzelnen Spinoren herstellen zu können wurde eine kovariante Ableitung und dadurch ein Spin-Zusammenhang des Tangentialbündels TM mit Strukturgruppe $SL(2,\mathbb{C})$ und eine Darstellung ρ dieser Gruppe durch 4×4 -Matrizen aus Spin(1,3) gefordert. Diese konnten durch die aus Boosts und Rotationen erzeugten, allgemeinen infinitesimalen Lorentztransformationen geliefert werden. Da die Pauli-Matrizen dieselben Kommutatorrelationen erfüllen und über die Abbildung ρ durch die Dirac-Matrizen ersetzt werden konnten, existierte dann ein, von diesen Matrizen abhängiger, Zusammenhang des Spinor-Bündels. Durch die Kontraktion der Dirac-Matrizen mit den Tetraden und dem Einsetzen der gefundenen Objekte in die Dirac-Gleichung des Minkowski-Raumes, ergab sich letztendlich die gesuchte, allgemein kovariante Gleichung zur Beschreibung von Spin-(1/2) Teilchen.

Die hergeleitete Dirac-Gleichung hat im allgemeinen keine ebenen Wellen als Lösungen und nur in sehr speziellen Fällen können überhaupt geschlossene Lösungen gefunden werden. Bei einer Interpretation als Gleichungen für quantisierte Felder treten zusätzliche Schwierigkeiten auf. Diese erstrecken sich aber genauso auf den flachen Minkowski-Raum wie auf gekrümmte Raumzeiten. Ian D. Lawrie beschreibt die Minkowski-Raum Version des sogenannten Unruh-Effekts dabei folgendermaßen [19]:

the vacuum state, which from the point of view of an inertial observer contains no particles, will be perceived by an accelerating observer as containing a thermal bath of particles at a temperature proportional to the observer's acceleration.

Bei der Beschreibung des Effektes wird davon ausgegangen, dass ein Grundzustand in der Quantenfeldtheorie in speziellen Koordinaten für einen Teil der Raumzeit, dargestellt wird. Dieser sogenannte *Rindler-Wedge* wird also über die *Rindler-Koordinaten* beschrieben und stellt den Ausgangspunkt der Herleitung dar. Ein in der Rechnung auftretender, aus der Perspektive des Rindler-Beobachters betrachteter, Erwartungswert von Teilchen mit Impulsen im Intervall p und p + dp, enthält als einen Faktor die mittlere Besetzungszahl der Fermi-Dirac-Statisik. Diese beschreibt aber den Erwartungswert eines Ensembles von Teilchen in einem bestimmten Zustand. Während der Bildung des Erwartungswertes geht eine große Menge an Information verloren. Der obige, in der Herleitung des Unruh-Effekts auftauchende Term ist aber Erwartungswert eines reinen Zustandes, der somit alle verfügbaren Informationen enthält. Dieser Zustand eines Feldes mit der Gesamtheit der Informationen ist nur dem im Rindler-Wedge beschleunigten Beobachter zugänglich. Für den Teil der Raumzeit, der für ihn unzugänglich ist, gehen dann Informationen über diesen Zustand verloren.

Von einem quantenfeldtheoretischen Standpunkt aus bedeutet obige Aussage aber auch, dass die Anzahl der in einem gewissen Zustand vorkommenden Teilchen vom Bezugssystem des Beobachters abhängig ist. Das Konzept des Teilchens hat somit keine vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung und auch die Definition des Vakuums als Zustand nicht vorhandener Teilchen ist hinfällig. Solange die Minkowski-Raumzeit betrachtet wird, ist die Anzahl von Teilchen in einem bestimmten Zustand in allen Inertialsystemen gleich und da diese üblicherweise zur Definition der Teilchen und des Vakuums herangezogen werden, ist der Effekt im flachen Raum von geringer Bedeutung. Bei einer Beschleunigung durch die Erdanziehung von $g = 9,81m/s^2$ ist die Temperatur durch den Unruh-Effekt nur $4 \cdot 10^{-20}K$ und somit für alle praktischen Anwendungen absolut vernachlässigbar.

In einer gekrümmten Raumzeit gilt dies jedoch nicht mehr, da kein einzelnes Koordinatensystem für die gesamte Mannigfaltigkeit gefunden werden kann. Im Allgemeinen wird dann kein Zustand existieren, der von jedem Beobachter als Vakuum bezeichnet wird. Bezüglich des Äquivalenzprinzips könnte dann erwartet werden, dass ein beschleunigter Beobachter in einem Vakuum, dort vorhandene Teilchen als von einem Gravitationsfeld erzeugt interpretiert. Eine im Jahre 1974 von Stephen Hawking veröffentlichte Arbeit [22] bestätigte diese Annahme für den Fall eines schwarzen Loches. Laut Hawking wird ein Beobachter in großer Entfernung zum schwarzen Loch die Emission von Teilchen aus demselben wahrnehmen. Besitzt es eine Masse M, korrespondiert diese Hawking-Strahlung genau zu der eines schwarzen Körpers der Temperatur $kT = \hbar \kappa / 2\pi$. κ steht dabei für die Beschleunigung durch Gravitation an der Oberfläche eines Körpers der Masse M und Schwarzschildradius r_S , bei einem schwarzen Loch also für die Beschleunigung am Ereignishorizont. Teilchen innerhalb dieses Horizonts können dem schwarzen Loch nicht mehr entkommen, daher muss ihre Erzeugung außerhalb desselben stattfinden. Die dazu benötigte Energie muss dann durch eine Reduktion der Masse des schwarzen Lochs bereitgestellt werden. Eine detailierte Analyse zeigt, dass die Energiedichte in der Nähe des Ereignishorizonts sogar negativ ist und es einen einwärts gerichteten Energiefluss gibt. Demnach können schwarze Löcher "verdampfen" und ggf. vollständig verschwinden. Die Temperatur der emittierten Strahlung sinkt dabei mit wachsender Masse. Große schwarze Löcher haben hierdurch eine nicht nachweisbare Strahlung. Kleine emittieren hingegen eine deutliche Wärmestrahlung was zu einer raschen Massereduktion führt. Bei der Verallgemeinerung der QFT auf gekrümmte Raumzeiten wurde jedoch die Rückwirkung des Quantenfeldes vernachlässigt. Um das Schicksal eines schwarzen Lochs verstehen zu können, bedarf es daher einer Theorie, die auch diese Wechselwirkung berücksichtigt.

6 Anhang A

Dieser Appendix dient einer Wiederholung mathematischer Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART). Dementprechend sind die hier aufgeführten Darstellungen weder vollständig, noch werden Herleitungen einzelner Aussagen explizit durchgeführt. An für das Verständis wichtigen Stellen, wird auf anschaulichere Spezialfälle und Beispiele verwiesen, da sich insbesondere eine Behandlung differentialgeometrischer Objekte wie Kurven, Tangenten oder Krümmung auf intuitive Vorstellungen beruft. Um eine möglichst präzise Formulierung der angesprochenen Konzepte zu gewährleisten, folgt die Darstellung einer eher strengen, wenn auch nicht stringenten mathematischen Notation und ist in großen Teilen an [23] und [4] angelehnt. Daher werden, in unüblicher Weise, in diesem Appendix ausschließlich kleine lateinische Buchstaben als Indizes verwendet.

6.1 Karten, Atlanten, Mannigfaltigkeiten

In dem 1918 in den Annalen der Physik veröffentlichten Artikel Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie [24], ging Albert Einstein auf eine Reihe von Publikationen desselben Jahres ein, um einige Grundlagen der ART neu zu formulieren. Dabei beschrieb er die drei Hauptgesichtspunkte, die auch heute noch in etwas abgewandelter Form, die Ausgangspunkte der ART bilden, folgendermaßen:

Relativitätsprizip: Die Naturgesetze sind nur Aussagen über zeiträumliche Koinzidenzen; sie finden deshalb ihren einzig natürlichen Ausdruck in allgemein kovarianten Gleichungen.

 \ddot{A} quivalenzprinzip: Trägheit und Schwere sind wesensgleich. Hieraus und aus den Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie folgt notwendig, daß der symmetrische Fundamentaltensor ($g_{\mu\nu}$) die metrischen Eigenschaften des Raumes, das Trägheitsverhalten der Körper in ihm, sowie die Gravitationswirkungen bestimmt. Den durch den Fundamentaltensor beschriebenen Raumzustand wollen wir als "G-Feld" bezeichnen.

Machsches Prinzip: Das G-Feld ist restlos durch die Massen der Körper bestimmt. Da Masse und Energie nach den Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie das Gleiche sind und die Energie formal durch den symmetrischen Energietensor $(T_{\mu\nu})$ beschrieben wird, so besagt dies, daß das G-Feld durch den Energietensor der Materie bedingt und bestimmt sei.

Heute wird zwischen dem schwachen Äquivalenzprinzip (WEP) und dem starken oder einsteinschen Äquivalenzprinzip (EEP) unterschieden und vor allem letzteres ist für die im folgenden Kapitel eingeführten Begriffe verantwortlich. Wird der zweite Teil des oben angeführten Äquivalenzprinzips umformuliert und erweitert, schreibt sich das EEP etwa:

In sehr kleinen Raumzeit Regionen, reduzieren sich die Gesetze der Physik auf die der speziellen Relativitätstheorie; mit lokalen Experimenten ist es unmöglich ein Gravitationsfeld zu detektieren. Durch die Aussage des Prinzips wird also eine mathematische Struktur gesucht, die sich lokal wie der Minkowski-Raum verhält, aber global auch eine nichttriviale Krümmung des Raumes zulässt. Forderungen dieser Art können durch sogenannte Mannigfaltigkeiten erfüllt werden.

Definition 6.1.1 M sei eine Menge und $n,k \in \mathbb{N}$. Eine n-dimensionale **Karte** von M ist ein Paar (U,φ) , mit $U \subseteq M$ und φ als eine Bijektion von U auf eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n . Ein C^k -Atlas \mathcal{A} von M ist eine Familie von Karten $(U_i,\varphi_i), (i \in I)$ mit den Eigenschaften: $(M\mathcal{A}1)$

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i$$

(MA2) Kompatibilität der Karten (Paarweise): Für $i,j \in I$ und $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} C^k$ -diffeomorph (bijektiv und k-mal stetig differenzierbar).



Abbildung 6.1.1: $(M\mathcal{A}1)$ Die vier Karten der Kugel bilden einen Atlas. $(M\mathcal{A}2)$ Kompatible Karten (U,φ) und (V,ψ) .

Definition 6.1.2 Zwei C^k -Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{B} einer Menge M sind äquivalent, wenn $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ wieder ein C^k -Atlas ist, also jede Karte von \mathcal{A} mit jeder Karte von \mathcal{B} kompatibel ist und umgekehrt.

Definition 6.1.3 Ein C^k -Atlas ist \mathcal{A} maximal, wenn er jeden zu \mathcal{A} äquivalenten Atlas umfasst.

Die bisher definierten grundlegenden Konzepte sind für die Einführung des Mannigfaltigkeitsbegriffes noch nicht vollständig ausreichend, da zusätzlich z.B. Stetigkeit, der auf einer Mannigfaltigkeit noch zu definierenden reellwertigen Funktionen, für physikalisch relevante Aussagen gefordert wird.

Definition 6.1.4 Ein topologischer Raum $[M,\mathcal{G}]$ ist eine Menge M und ein System \mathcal{G} von Teilmengen von M mit

- $(G1) \ M, \emptyset \in \mathcal{G}$
- (G2) Für $G_i \in \mathcal{G}$ gilt auch $\bigcup_i G_i \in \mathcal{G}$
- (G3) Für $G_1, \ldots, G_M \in \mathcal{G}$ gilt $G_1 \cap \ldots \cap G_m \in \mathcal{G}$

Das System G heißt Topologie, seine Bestandteile offene Mengen.

Durch \mathcal{G} wird ein Konvergenzbegriff festgelegt, die Eindeutigkeit erhält man durch ein Trennungsaxiom: **Definition 6.1.5** Ein topologischer Raum [M,G] heißt **Hausdorff-Raum**, wenn zu zwei verschiedenen Elementen $P, Q \in M$ immer disjunkte Mengen $G, H \in G$ mit $P \in G$ und $Q \in H$ existieren.

Dieses Trennungsaxiom kann nur erfüllt werden, wenn ein sogenanntes zweites Abzählbarkeitsaxiom gefordert wird. Die durch den maximalen Atlas erzeugte Topologie wandelt hiermit die Grundmenge in einen Hausdorff-Raum.

Definition 6.1.6 Eine C^k -Mannigfaltigkeit $[M,\mathcal{A}]$ ist ein das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllender Hausdorff-Raum M mit einem C^k -Atlas \mathcal{A} , dessen Karten φ Homeomorphismen¹ sind. Wenn alle Bilder $\varphi(U)$ der Karten offene Teilmengen von \mathbb{R}^n sind, ist n die Dimension der Mannigfaltigkeit.

Bis hierher ist es also möglich, lokal auf den \mathbb{R}^n abzubilden, mit der Möglichkeit dort stetig differenzierbare Funktionen zu definieren. Dieses Vorhaben motiviert den Begriff der Untermannigfaltigkeit, durch welche spezielle, jedoch anschaulichere Definitionen der Kurve des Tangentenvektors und Tangentenraumes in \mathbb{R}^m möglich werden, um auf den axiomatischen Zugang des allgemeinen Falles vorzubereiten.

Definition 6.1.7 Eine n-dimensionale C^k -Untermannigfaltigkeit M in \mathbb{R}^m (n < m) ist eine nichtleere Menge der Form

$$M = \{ (\xi^1, \dots, \xi^m) \in \mathbb{R}^m : f_i(\xi^1, \dots, \xi^m) = 0, i = 1, \dots, m - n \}$$

mit k-mal stetig differenzierbaren Funktionen f_i auf \mathbb{R}^m , deren Funktionalmatrix auf M den Rang m-n hat.

Der Begriff der Tangentialebene in einem bestimmten Punkt P, der in einer glatten Fläche verlaufenden Kurve in \mathbb{R}^3 , bereitet der Anschauung geringe Schwierigkeiten. Erweiterung auf \mathbb{R}^m ergibt dann:

Definition 6.1.8 Eine C^k -Kurve auf einer Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^m ist eine Abbildung γ von einem Intervall I nach M, deren Bestandteile γ^i definiert durch

$$\gamma(t) = (\gamma^1(t), \dots, \gamma^m(t))$$

k-mal stetig differenzierbar sind².

Ein Tangentevektor ergibt sich nun durch das Bilden der Ableitung der Kurve γ

Definition 6.1.9 Der Vektor

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

zur oben definierten Kurve heißt **Tangentenvektor** im Punkt $\gamma(t)$. M_p bezeichnet die Menge aller Tangenvektoren im Punkt P und heißt **Tangentenraum**.

Tangentenvektoren in diesem Sinne lassen sich als Geschwindigkeitvektoren auffassen, wenn die Kurve als Bahngleichung eines Massenpunktes verstanden wird. Dies erhellt auch den Umstand, dass sich ein Tangentenvektor durch die Wirkung einer Richtungsableitung auf reelle Funktionen erklären lässt.

39

¹Ein Homeomorphismus ist eine bijektive, stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen mit stetiger Inverse.

 $_2$ Hier in Parameterdarstellung

Definition 6.1.10 Für eine C^{∞} -Untermannigfaltigkeit M von \mathbb{R}^m sei $\mathcal{F}(M)$ der lineare Raum aller reellwertigen Funktionen f auf M, für die für jede Karte φ die Funktion $f \circ \varphi^{-1}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Werden jetzt zwei Funktionen $f,g \in \mathcal{F}(M)$ gewählt, heißen diese *P*-äquivalent, wenn sie auf einer offenen Umgebung von *P* übereinstimmen. Durch diese Äquivalenzrelation wird eine Klasseneinteilung in $\mathcal{F}(M)$ erzeugt und das System all jener Klassen *P*-äquivalenter Funktionen mit $\mathcal{F}(P)$ bezeichnet. Da nun ein linearer Raum für die Funktionen f gegeben ist, kann die Richtungsableitung definiert werden:

Definition 6.1.11 Zu $P \in M$, $x \in M_p$ und $f \in \mathcal{F}(M)$ heißt die Zahl $xf = (f \circ \gamma)'(0)$ mit $\gamma(0) = P$ und $\gamma'(0) = x$ **Richtungsableitung** von f an der Stelle P in Richtung x.

6.2 Der Tangentialraum

Die durch die Definitionen 6.1.7 - 6.1.11 gewonnenen speziellen Aussagen, werden nun verallgemeinert.

Definition 6.2.1 Es sei $P \in M$. Eine Abbildung $x : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

Linearität: $x(\lambda f + \mu g) = \lambda(xf) + \mu(xg)$

Leibniz-Regel: x(fg) = (xf)g(P) + f(P)(xg)

wird **Tangentenvektor** (bzw. **Tangentialvektor**, kontravarianter Vektor) in P genannt. Die Menge aller Tangentialvektoren zu einem festen Punkt $P \in M$ heißt **Tangentenraum** (bzw. **Tangentialraum**) M_p . Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume von M

$$TM = \bigcup_{P \in M} \{P\} \times M_p$$

heißt Tangentialbündel von M.

Im Gegensatz zum Tangentialraum, ist das Tangentialbündel TM kein linearer Raum, sondern eine Mannigfaltigkeit mit dim(TM) = 2dim(M). Die Kurvendefinition auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit ergibt sich abgesehen von einigen Modifikationen analog zu Def. 6.1.8 und gibt durch Umrechnung auf die Karte Anlass zu k-mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen u^1, \ldots, u^m definiert durch $(u^1(t), \ldots, u^m(t)) = \varphi(\gamma(t))$. Dies führt auf:

Definition 6.2.2 Zu einem gegebenen Punkt P der n-dimensionalen C^{∞} -Mannigfaltigkeit und der Karte φ bezeichnet $\frac{\partial}{\partial u_i}(P)$ oder kürzer ∂_i den Tangentenvektor, welcher der Funktion $f \in \mathcal{F}(P)$ die Zahl

$$\frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i} \varphi(P) = \partial_i (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(P))$$
(6.2.1)

zuordnet.

Die Anwendung des Tangentevektors ∂_i auf f bedeutet also die partielle Ableitung nach der *i*ten Koordinate, der auf die Karte φ umgerechneten Funktion $f \circ \varphi^{-1}$. Erneut dient das Beispiel aus Def.6.1.7 der *n*-dimensionalen C^k -Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^m der Anschauung. Mit der Darstellung $(\xi^1, \ldots, \xi^m) = \varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^n)$ entspricht dies dem Vektor:

$$\partial_i = \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial \xi^m}{\partial u^i}\right) \tag{6.2.2}$$

Das die ∂_i 's eine Basis des M_p bilden, wird erst nach Einführung des Vektorfeldbegriffes deutlich, welcher speziell im \mathbb{R}^3 in Kombination mit den Tangentialräumen auf natürliche Weise eine Vorstellung von Krümmung in mathematischer Formulierung geben kann.

Definition 6.2.3 Ein Vektorfeld X auf einer C^{∞} -Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung, die jedem Punkt $P \in M$ einen Tangentialvektor $X(P) \in M_p$ zuordnet. X ist ein C^{∞} -Vektorfeld, wenn für alle $f \in \mathcal{F}(M)$ die reellwertige Funktion Xf, definiert durch Xf(P) = X(P)f, beliebig oft differenzierbar ist. Der lineare Raum aller C^{∞} -Vektorfelder auf M heißt $\mathcal{X}(M)$.

Ist P ein Punkt einer *n*-dimensionalen C^{∞} -Mannigfaltigkeit M, gibt jede Karte (U,φ) mit $P \in U$ Anlass zu den *n* Vektorfeldern $\partial_i \in \mathcal{X}(P)$, definiert durch

$$\partial_i f(P) = \partial_i (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(P)) \,. \tag{6.2.3}$$

Das sind die zur Karte φ gehörenden Koordinatenvektorfelder $\partial_i, \ldots, \partial_n$ und zu ihnen bilden für jeden Punkt P der Karte, die Tangentialvektoren $\partial_i(P)$ im Tangetialraum M_p eine Basis. Diese Basisvektoren werden also durch die gewählten Koordinatenfunktionen bestimmt und auf Grund ihrer Verknüpfung holonome Basen genannt.

Allgemein können neben Vektoren auch entsprechende Duale eingeführt werden, denn die Menge aller linearen Funktionale ω eines Vektorraumes V mit $\omega : V \to \mathbb{K}^1$ bildet selbst einen linearen Raum, genannt Dualraum V^* . Wie in Def.6.2.3 zu sehen, wird in der klassischen ART mit Vektorräumen in Form von Tangentialräumen gearbeitet, dementsprechend werden also Dualräume für eben diese gesucht. Der zum linearen Tangentialraum M_p duale Raum M_p^* heißt Kotangentialraum, seine Elemente Kotangentialvektoren (bzw. Kovektoren, kovariante Vektoren).

Definition 6.2.4 Ein Kovektorfeld K auf M ordnet jedem $P \in M$ einen Kovektor $K(P) \in M_p^*$ zu. K ist ein C^{∞} -Kovektorfeld, wenn für jedes C^{∞} -Vektorfeld X auf M die reellwertige Funktion $P \to \langle X(P), K(P) \rangle^2$ beliebig oft differenzierbar ist.

Wie oben geschen, gibt eine Karte Anlass zu *n*-Koordiantenvektorfeldern ∂_i , die im Punkt *P* eine Basis in M_p bilden können.

$$\{du^i|_p\}_{i=1,\dots,n}$$

Definition 6.2.5 Die n Kovektorfelder du^1, \ldots, du^n ordnen jedem Punkt P der Karte mit Koordinatenvektorfeldern ∂_i die Elemente der zur Basis $\underbrace{\partial_i(P), \ldots, \partial_n(P)}_{\{\partial_i|_p\}_{i=1,\ldots,n}}$ dualen Basis zu.

Üblicherweise wird in der Bezeichnung nicht zwischen dem Kovektorfeld und der Linearform, die es an der Stelle P annimmt, unterschieden. Dann gilt:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial u^{i}}(P), du^{k} \right\rangle = \begin{cases} 1, & \text{für } i = k\\ 0, & \text{für } i \neq k \end{cases}$$

Die holnome Basis des Kotangentialraumes $\{du^i |_p\}_{i=1,...,n}$ ist also durch Abbildungen mit der Eigenschaft $du^k(\partial_i) = \delta^k_i$ gegeben, dh. du^k ordnet dem Tangentialvektor $x^i\partial_i$ seine k-te Komponente zu. Somit befindet sich an jedem Punkt P der Mannigfaltigkeit ein Vektorfeld und dessen Dualraum, womit nun multilineare Abbildungen (Tensoren) aus diesen Räumen in die reellen Zahlen definiert werden können. Desweiteren lassen sich in diesen Basen beliebige Vektoren als Linearkombination entwickeln. Mit entsprechenden Komponenten $X^0, \ldots, X^{n-1}(P)$ erhält man:

$$X = X^{i}\partial_{i} \in M_{p}$$

$$K = K_{i}du^{i} \in M_{p}^{*}.$$
(6.2.4)

 $_1\mathbb{K}$ ist der jeweilige Körper

₂Sei ω eine Linearform bzw. ein Kovektor: der Wert von ω an der Stelle x wird mit $\langle x, \omega \rangle$ bezeichnet

Die im letzten Absatz schon verwendete Einsteinsche Summenkonvention¹ erfordert einheitliche Vorschriften an welchen Positionen Indizes zu stehen haben. Vektoren werden beim Nummerieren unten indiziert, ihre Koeffizienten in Linearkombinationen dementsprechend oben (in Basisdarstellung sind die Koordianten eines Vektors Koeffizienten) und werden, wie oben schon angedeutet, kontravariant genannt. Bei Linearformen oder Kovektoren vertauschen diese Positionen und sie werden kovariant genannt. Lineare Abbildungen darstellende Matrizen wirken auf Koordinaten, wodurch der Spaltenindex unten und der Zeilenindex oben auftritt. Bei der Koeffizientenmatrix einer Bilinearform müssen beide Indizes unten stehen. Der im nächsten Abschnitt eingeführte Tensorbegriff verallgemeinert die oben besprochenen Objekte und ermöglicht so unter anderem eine für unsere Zwecke erforderliche einheitliche Theorie der Koordinatentransformationen. Von nun an werden Komponenten der Koordinatenabbildungen also mit x^i und die zugehörigen Basisvektoren des Tangetial-, bzw. Kotangetialraumes mit ∂_i und dx^i bezeichnet.

6.3 Tensoren

Definition 6.3.1 Es seien p und q nichtnegative ganze Zahlen. Eine multilineare Abbildung

$$T: \underbrace{M_p^* \times \ldots \times M_p^*}_{p} \times \underbrace{M_p \times \ldots \times M_p}_{q} \to \mathbb{R}, \qquad (6.3.1)$$

heißt p-fach kontravarianter Tensor und q-fach kovarianter Tensor oder kürzer (p,q)-Tensor.

Definition 6.3.2 Seien U und V Tensoren der Stufe (p,q) bzw. (r,s). Das **Tensorprodukt** $U \otimes V$ definiert durch

$$(U \otimes V)(v^{1}, \dots, v^{p}, w^{p+1}, \dots, w^{p+r}, f_{1}, \dots, f_{q}, g_{q+1}, \dots, g_{q+s})$$

= $U(v^{1}, \dots, v^{p}, f_{1}, \dots, f_{q})V(w^{p+1}, \dots, w^{p+r}, g_{q+1}, \dots, g_{q+s})$ (6.3.2)

mit $v^i, w^j \in M_p^*$ und $f_i, g_j \in M_p$ ist ein Tensor der Stufe (p+r, q+s).

Ein Tensor in dieser allgemeinen Definition ist unabhängig von der gewählten Basis. Dennoch können Komponenten bezüglich der Koordinatenbasis eingeführt werden. Betrachtet man einen Tensor der Stufe (p, q) in einer solchen Koordinatendarstellung

$$T = T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$
(6.3.3)

mit
$$T^{i_1,...,i_p}_{j_1,...,j_q} = T(dx^{j_1},...,dx^{j_q},\partial_{i_1},...,\partial_{i_p}),$$
 (6.3.4)

dann wird aus (6.3.4) im Ricci-Kalkül:

1

$$T = T^{i_1,\dots,i_p}_{j_1,\dots,j_q} \tag{6.3.5}$$

Das Hauptaugenmerk in dieser Darstellung der Tensorrechnung liegt auf dem, in der physikalischen Anwendung sehr relevanten, Transformationsverhalten bei Koordinatenwechseln. Da Tensoren wie festgestellt koordiantenunabhängig sind, ihre Komponentendarstellung hingegen nicht, wird zunächst ein Kartenwechsel der Komponenten betrachtet. Dieser erzeugt einen Diffeomorphismus, dessen Jacobimatrix (bzw. die Inverse) die Basisvektoren, beispielsweise $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ mit $(i = 1, \ldots, n)$, in eine andere Basis überführt

$$\partial_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \partial_i, \quad \text{und} \quad dx^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} dx^j.$$
 (6.3.6)

¹Wenn in einem Ausdruck ein Indexsymbol zweimal auftritt, einmal als oberer und einmal als unterer Index, wird über diesen Index summiert

Einsetzen in (6.3.3) liefert:

$$T^{i'_{1},\dots,i'_{p}}_{j'_{1},\dots,j'_{q}} = \frac{\partial x^{i'_{1}}}{\partial x^{i_{1}}} \dots \frac{\partial x^{i'_{p}}}{\partial x^{i_{p}}} \frac{\partial x^{j_{1}}}{\partial x^{j'_{1}}} \dots \frac{\partial x^{j_{q}}}{\partial x^{j'_{q}}} T^{i_{1},\dots,i_{p}}_{j_{1},\dots,j_{q}} .$$
(6.3.7)

In (6.3.6) und (6.3.7) ist zu sehen, dass sich die oberen Indizes mit der Inversen, die unteren Indizes mit der zugehörigen Jacobimatrix transformieren, daher die Ausdrücke **kontra**- und **kovariant**. Nun kann ähnlich dem Vektorfeld ein Tensorfeld definiert werden, welches jedem Punkt *P* der Mannigfaltigkeit *M* einen Tensor zuordnet.

Definition 6.3.3 Ein (p,q) **Tensorfeld** T auf M ist eine Abbildung, die jedem Punkt $P \in M$ einen Tensor $T(P) \in M_p$ zuordnet. T ist ein C^{∞} -Tensorfeld, wenn für C^{∞} -Vektorfelder X_1, \ldots, X_q und C^{∞} -Vektorfelder K^1, \ldots, K^p die reellwertige Funktion

$$P \Rightarrow T(P)(K^1, \dots, K^p, X_1, \dots, X_q) \tag{6.3.8}$$

beliebig oft differenzierbar ist.

Ein (p,q) Tensorfeld ordnet also einem Punkt $P \in M$, q Vektoren aus M_p und p Linearformen aus M_p^* eine Zahl zu, so dass durch Einsetzen aus q Vektorfeldern und p Kovektorfeldern ein skalares Feld wird. Insbesondere ordnet ein (0,2)-Tensorfeld zwei Vektorfeldern in bilinearer Weise ein skalares Feld zu. Solch ein Tensorfeld der Stufe (0,2) spielt in der ART eine zentrale Rolle, wird mit g bezeichnet und heißt **Fundamentaltensor**, **metrischer Tensor** oder kurz **Metrik**. Das dazugehörige kontravariante Tensorfeld heißt kontravarianter metrischer Tensor und wird auch mit g bezeichnet. Obwohl g weder symmetrisch noch positiv definit¹ sein muss, wird Symmetrie im weiteren Verlauf gefordert.

Da der Bedeutung der Metrik in dieser Arbeit nicht Rechnung getragen werden kann, wird zur Verdeutlichung im Folgenden eine äußerst unvollständige Liste ihrer vielfältigen Zwecke angegeben [4]. Sie ermöglicht:

- eine Vorstellung von "Vergangenheit" und "Zukunft"
- die Berechnung von Bogenlänge und Eigenzeit
- die Bestimmung der "kürzesten Strecke" zwischen zwei Punkten P_1, P_2 und daher die Bewegung von Testteilchen
- die Ersetzung des Newtonschen Gravitationsfeldes ϕ
- die Ersetzung des traditionellen euklidischen, dreidimensionalen Skalarproduktes

Der Begriff der Bogenlänge $s(\gamma)$ einer durch t parametrisierten Kurve γ , wird als Integral auch über die Metrik definiert

$$s(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\gamma'(t), \gamma'(t))} dt \,. \tag{6.3.9}$$

Werden die Koordinaten $x^1(t), \ldots, x^n(t)$ gewählt, ist der Tangentialvektor $\frac{dx^i}{dt}\partial_i$ und (6.3.9) wird zu

$$s(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \,. \tag{6.3.10}$$

¹Eine symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ heißt positiv definit, falls $\langle v, v \rangle > 0$, mit $v \in V$.

Ableiten nach der Zeit ergibt:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}},$$
(6.3.11)

was als Linienelement bezeichnet wird und sich üblicherweise in der Form

$$ds^2 = g_{ij}dx^i \otimes dx^j = g_{ij}dx^i dx^j \tag{6.3.12}$$

schreibt. Desweiteren erlaubt die Metrik zwischen Tangential- und Kotangentialraum hin und her zu wechseln, man sagt: die Indizes werden "herauf" und "herunter" gezogen.

Die vorangegangene Diskussion motiviert nun die Definitionen, der für die hier dargestellten Belange entsprechenden Mannigfaltigkeiten.

Definition 6.3.4 Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit M ist eine endlichdimensionale C^{∞} -Mannigfaltigkeit mit einem symmetrischen 2-fach kovarianten C^{∞} -Tensorfeld g, für das die Bilinearform g(P) überall nicht ausgeartet¹ ist. Der Index der Bilinearform sei I und gibt für eine kanonische Basis die Anzahl der negativen 1en auf der Diagonalen der Bilinearform an.

- Ist I = 0 wird M Riemannsche Mannigfaltigkeit genannt.
- Ist I = 1 bzw. I = n 1, wird M Lorentzmannigfaltigkeit genannt.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird, sofern nicht anders angegeben, von vierdimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeiten mit Index I = 3 ausgegangen, da sich diese Wahl für die Einführung von Spinoren als vorteilhaft erweisen wird und die meisten Quellen dieselbe Metrik-Signatur verwenden. Durch die Begriffe der Orientierung und Zeitorientierung, die hier nur durch Beispiele erläutert werden sollen, lässt sich letztendlich das so mysteriös anmutende Konzept der Raumzeit einführen. Das simpelste Beispiel für Orientierung von Hyperflächen über Mannigfaltigkeiten stellt die Kugel in \mathbb{R}^3 dar. Ein



Abbildung 6.3.1: Möbius-Band, Kleinsche Flasche

Normalenvektor auf der Außenseite der Kugeloberfläche zeichnet diese eindeutig gegen die Innenseite aus, anders als z.B. beim Möbius-Band oder der Kleinschen Flasche (siehe Abbildung (6.3)), deren Flächen nicht orientiert sind. Zeitorientierung lässt sich über die Metrik zu einer sogenannten Lorentz-Basis $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ erläutern, für die gilt:

$$g(x_i, x_j) = g_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{für } i \neq j \\ 1, & \text{für } i = j = 0 \\ -1, & \text{für } i = j = k \text{ mit } k = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$
(6.3.13)

Die Menge aller Vektoren x eines solchen Lorentz-Raumes mit g(x, x) > 0 besteht aus zwei disjunkten konvexen Lichtkegeln dh., dass jedes positive Vielfache eines Vektors aus dem Kegel wieder zu dem Kegel gehört. Ist dies für eine zusammenhängende Lorentz-Mannigfaltigkeit gegeben, heißt sie zeitorientiert.

¹Jede Bilinearform definiert lineare Abbildungen $V \to W^*$, $v \mapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle)$ und $W \to V^*$, $w \mapsto (v \mapsto \langle v, w \rangle)$, mit $v \in V, w \in W^*$ ist. Sind die beiden Abbildungen $V \to W^*$ und $W \to V^*$ injektiv, so heißt die Bilinearform nicht ausgeartet.

Definition 6.3.5 Eine **Raumzeit** ist eine vierdimensionale orientierte und zeitorientierte Lorentz-Mannigfaltigkeit. Ein Tangentialvektor x einer Raumzeit nennt sich:

- zeitartig für g(x, x) > 0
- raumartig für g(x, x) < 0 oder x = 0
- lichtartig für g(x, x) = 0 und $x \neq 0$

Ein zeitartiger Vektor, der zum ausgezeichneten Kegel gehört, heißt zukunftsweisend¹.

6.4 Die kovariante Ableitung

Tensoren sind bis zu diesem Zeitpunkt lokale Objekte, da sie durch lokal definierte Tangetialräume an Punkten $P \in M$ eingeführt wurden. Um zu untersuchen wie sich z.B. ein Vektor ((1,0)-Tensor) bei infinitesimaler Verschiebung des Punktes P ändert, wird ein Ableitungsbegriff benötigt. Dieser wurde bisher jedoch ausschließlich als Richtungsableitung , dh. bezüglich spezieller Koordinaten eingeführt. Daher ist es unerlässlich, eine forminvariante Verallgemeinerung der partiellen Ableitung zu finden, da die partielle Ableitung $\partial_i T^i$ zwar prinzipiell möglich, das Resultat jedoch kein Tensor mehr ist. Abhilfe kann die Einführung eines Zusammenhangs bieten, welcher Tangetialräume linear aufeinander abbilden und einer Leibnizregel gehorchen soll.

Definition 6.4.1 Eine Operation $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ mit den Eigenschaften

 $(D1) \ \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$

 $(D2) \ \nabla_X (\lambda Y + \mu Z) = \lambda \nabla_X Y + \mu \nabla_X Z$

 $(D3) \ \nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

für Zahlen $f,g \in \mathcal{F}(M)$ und Zahlen λ und μ heißt **Zusammenhang**.

Der Name ergibt sich aus dem, durch diese Operation ermöglichten, Isomorphismus zwischen zwei Tangentialräumen M_p und M_q . Für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit [M, g] existiert genau ein Zusammenhang ∇ mit den zusätzlichen Eigenschaften

- (D4) $Zg(X,Y) = g(\nabla_Z X,Y) + g(X,\nabla_Z Y)$ (Metrizität)
- (D5) $\nabla_X Y \nabla_Y X = [X, Y]$ (Torsionsfreiheit)

Die in (D5) auftretende Klammer wird Lie-Ableitung genannt und erfüllt auch die Eigenschaften einer koordiantenabhängigen Differentiation, ist allerdings keine Verallgemeinerung der Richtungsableitung in euklidischen Räumen und schreibt sich:

$$[X, Y](P)f = XYf(P) - YXf(P).$$
(6.4.1)

Definition 6.4.2 Die Operation ∇ in $\mathcal{X}(M)$ zu einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit [M, g]mit den Eigenschaften (D1) bis (D5) heißt Levi-Civita-Zusammenhang, im Spezialfall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit Riemannscher Zusammenhang. Zu Vektorfeldern X und Y heißt das Vektorfeld $\nabla_X Y$ kovariante Ableitung von Y bzgl. X.

Die kovariante Ableitung von Y ist das (1, 1)-Tensorfeld ∇Y , das dem Punkt $P \in M$ und dem Tangentialvektor $x \in M_p$ den Tangentialvektor $\nabla_X Y(P)$ mit X(P) = x zuordnet. Außerdem ist die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes auf einer gekrümmten Hyperfläche die orthogonale Projektion der Richtungsableitung im Sinne von \mathbb{R}^3 (siehe [23]). Für Verallgemeinerungen der

¹ siehe Erläuterungen zur Stellung der Metrik oben

ART wie z.B. der Riemann-Cartan-Theorie, werden (D4) und (D5) teilweise fallengelassen.

Betrachtet wird nun die kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes. Mit $X = X^i \partial_i$, $Y = Y^k \partial_k$ und

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i} Y^k \partial_k = X^i (\partial_i Y^k \partial_k + Y^k \nabla_{\partial_i} \partial_k) = X^i (\partial_i Y + Y^k \Gamma^i_{jk}) \partial_i , \qquad (6.4.2)$$

motiviert dies die Einführung eines neuen Symbols.

Definition 6.4.3 Die durch die Darstellung

$$\nabla_{\partial_i}\partial_k = \Gamma^i_{jk}\partial_i \tag{6.4.3}$$

definierten reellwertigen Funktionen Γ_{jk}^{i} heißen **Zusammenhangskoeffizienten** und werden speziell für den Levi-Civita-Zusammenhang **Christoffelsymbole** genannt.

Um den Formalismus der ART noch etwas schlanker zu gestalten, ist es üblich partielle Ableitungen durch ein Komma $(T^i_{,j} = \partial_j T^i)$ und kovariante Ableitungen durch ein Semikolon $(T^i_{;j} = \nabla_j T^i)$ zu kennzeichnen. Desweiteren sollen auch die Jacobimatrizen (6.3.6) abkürzend in Komponenteendarstellung geschrieben werden. Dazu werden zwei Basen x_1, \ldots, x_n und y_1, \ldots, y_n gekoppelt durch $y_k = \alpha^i_k x_i$ bzw. $x_i = \beta^k_i y_k$ betrachtet. Damit ergibt sich:

$$\alpha^{i}_{\ k} := \frac{\partial x^{i}}{\partial y^{k}} \quad \text{und umgekehrt} \quad \beta^{k}_{\ i} := \frac{\partial y^{k}}{\partial x^{i}} \,. \tag{6.4.4}$$

Für Dualvektoren erfolgt die Bezeichnung analog. Die Komponenten von (6.4.2) schreiben sich damit:

$$Y^{k}_{:i} = Y^{k}_{:i} + \Gamma^{k}_{ij}Y^{j}. ag{6.4.5}$$

Durch die eben eingeführte kovariante Ableitung lassen sich nun oben genannte Schwierigkeiten bei einfacher partieller Ableitung beheben und auch in zu (6.4.5) analoger Weise auf Tensorkomponenten verallgemeinern. Wird jetzt noch eine Koordinatentransformation durchgeführt und derselbe Tensor kovariant abgeleitet, ist es möglich ein allgemeines Transformationsverhalten von Zusammenhängen festzustellen¹ [4]. Sicher ist jedoch, dass sich die Zusammenhangskomponenten nicht wie Tensorkomponenten transformieren, denn dann wäre $\nabla_X Y$ kein Tangentialvektor.

Die Zusammenhangskoeffizienten berechnen sich von einer Karte mit den Koordinatenvektorfeldern $\tilde{\partial}_i = \alpha^j_{\ i} \partial_j$ bzw. $\partial_j = \beta^i_{\ i} \tilde{\partial}_i$ durch die Formel

$$\tilde{\Gamma}^{r}_{ij} = \beta^{r}_{\ t} (\alpha^{l}_{\ i} \alpha^{k}_{\ j} \Gamma^{t}_{lk} + \tilde{\partial}_{i} \alpha^{t}_{\ j}) \,. \tag{6.4.6}$$

Gelten (D4) und (D5), induziert die Metrik genau den Levi-Civita-Zusammenhang und für die Christoffelsymbole entsteht dann die wichtige Beziehung [23]

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2}g^{kr}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).$$
(6.4.7)

Aus (6.4.6) folgt bei Subtraktion zweier Zusammenhänge Γ_{ij}^r und $\hat{\Gamma}_{ij}^r$, dass sich die auftretenden Inhomogenitäten aufheben und die Differenz ein (1,2)-Tensor ist. Nicht jeder Zusammenhang

 $_1$ Hier wurden in üblicher Weise die Koeffizienten sprachlich mit dem Zusammenhang selbst identifiziert

muss symmetrisch sein, bei Permutation lässt sich daher mit Blick auf (6.4.6) ein neuer Zusammenhang finden. Als antisymmetrischen¹ Anteil erhält man den sogenannten **Torsionstensor**

$$S^{r}_{ij} = \Gamma^{r}_{[ij]} = \frac{1}{2} (\Gamma^{r}_{ij} - \Gamma^{r}_{ji}).$$
(6.4.8)

Da (6.4.8) für einen symmetrischen Zusammenhang verschwindet, spricht man in diesen Fällen von Torsionsfreiheit. Für eine physikalische Interpretation der oben eingeführten Objekte, speziell des Torsionstensors stellt sich nun die Frage, ob weitere Forderungen, z.B. an ihre Symmetrie gestellt werden müssen, um ihren Platz in der Theorie ausmachen zu können. Zunächst wird jedoch der Begriff der Krümmung auf einer Mannigfaltigkeit erläutert.

6.5 Paralleltransport und Krümmung

Wie schon im letzten Abschnitt besprochen, treten durch die lokale Definition von Tensoren Hindernisse vor allem in der Vergleichbarkeit an verschiedenen Tangentialräumen der zugrundegelegten Mannigfaltigkeit auf. Für eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit ermöglicht der Begriff der kovarianten Ableitung von Vektorfeldern über Paralleltransport, die Konstruktion von Isomorphismen zwischen Tangetialräumen. Eine sich daraus ergebende Charakterisierung des Parallelransports, lässt sich dann auf die kovariante Ableitung von Tensorfeldern verallgemeinern. Die hier gewählte Darstellung verweilt bei den Vektorfeldern, da das parallele



Abbildung 6.5.1: Parallelverschiebung

Verschieben eines Vektors in der euklidischen Geometrie ein anschauliches Konzept darstellt, denn dort ist ein Vektor einfach konstant bezüglich der Richtungsableitung (siehe (6.5)).

Definition 6.5.1 Ein Vektorfeld X auf einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit M heißt parallel längs der Kurve γ , wenn für alle t gilt $\nabla_{\gamma'(t)}X = 0$ mit $\gamma'(t) \in M_p$.

Bezüglich einer lokalen Karte und in Komponentendarstellung ist der Tangentialvektor entlang der Kurve $x^i(t)$ einfach $\frac{dx^i}{dt} = v^i$. In der euklidischen Geometrie wird eine Kurve als *Gerade* bezeichnet, wenn ihr Tangentialvektor von ihrem Anfangs- bis zu ihrem Endpunkt paralleltransportiert wird. Die Gleichung einer Geraden im flachen Raum ist:

$$\frac{dv^i}{dt} = \kappa v^i \,. \tag{6.5.1}$$

Umschreiben ergibt:

$$\frac{dv^{i}}{dt} = \frac{\partial v^{i}}{\partial x^{j}}\frac{dx^{j}}{dt} = \frac{\partial v^{i}}{\partial x^{j}}v^{j} = v^{i}{}_{,j}v^{j} \stackrel{(6.5.1)}{=} \kappa v^{i}.$$
(6.5.2)

Aus der partiellen wird in M die kovariante Ableitung, außerdem verschwindet durch die Forderung nach Paralleltransport die rechte Seite von (6.5.2). Man erhält dann die tensorielle Gleichung

$$v^{i}_{;j}v^{j} \stackrel{(6.4.5)}{=} \frac{d^{2}x^{i}}{dt^{2}} + \Gamma^{i}_{jr}\frac{dx^{j}}{dt}\frac{dx^{r}}{dt} = 0.$$
(6.5.3)

(6.5.3) wird **Geodätengleichung** genannt und sagt aus, dass das Geschwindigkeitsvektorfeld der Kurve längs derselben konstant ist. "Geradeausgehen" heißt in der Riemannschen Geometrie

¹Tensorindizes können symmetrisiert (runde Klammern), bzw. antisymmetrisiert (eckige Klammern) werden. Dabei wird über die Permutationen der relevanten Indizes summiert und anschließend durch die Anzahl der Terme dividiert. Bei Antisymmetrisierung erfolgt dasgleiche mit der alternierenden Summe:

 $T_{(i_1i_2...i_n)j}^{\ \ k} = \frac{1}{n!} (T_{i_1i_2...i_nj}^{\ \ k} + \text{Summe "uber die Permutationen der Indizes } i_1...i_n) \text{ bzw.}$

 $T_{[i_1i_2...i_n]j}^{(1,2,...i_n)j} = \frac{1}{n!} (T_{i_1i_2...i_nj}^{k} + \text{alternierende Summe über die Permutationen der Indizes } i_1...i_n).$

also, dieser Kurve (Geodäte) zu folgen.

Zur Veranschaulichung der Krümmung eines solchen Objektes stellt sich die Bertrachtung einer Kugeloberfläche als geeignet heraus. Die kürzeste Strecke von einem Punkt der Oberfläche zu einem anderen wird immer auf einem Großkreis liegen. Werden nun drei Punkte miteinander verbunden entsteht ein Dreieck dessen Winkelsumme nicht mehr 180° entpricht. In der Zweidimensionalität der Fläche bleibend, hat sich also die Geometrie dieser selbst verändert, man spricht hierbei von innerer Krümmung. Äußere Krümmung kann hingegen nur festgestellt werden, indem die Lage des Raums im umgebenen, höherdimensionalen Raum, die sogenannte Einbettung, betrachtet wird. Äußere, jedoch keine innere Krümmung hat z.B. ein zweidimensionales, in die dritte Dimension aufgerolltes Blatt Papier. Es wird allerdings ein von Einbettung unabhängiges



Abbildung 6.5.2: Parallelverschiebung auf der Kugel

Krümmungskonzept gefordert, daher ist es notwendig auf den oben eingeführten Paralleltransport zurückzugreifen. Die Krümmung einer Kurve γ in einem Punkt P gibt üblicherweise an, wie stark die Kurve in der unmittelbaren Umgebung des Punktes von einer Geraden abweicht. Diese Abweichung von Geradlinigkeit wird jetzt als Grundlage eines Krümmungsbegriffes verwendet. Dazu wird erneut die Kugeloberfläche betrachtet, mit einem, auf einer geschlossenen Kurve paralleltransportierten Tangetialvektor an die Kugel. Dann wird der Vektor nach einem vollständigen Umlauf nicht mehr mit dem Ausgangsvektor identisch sein, die erhaltene Abweichung (Schließungsfehler) gibt ein Maß für die Krümmung der Fläche an (siehe Abb.6.5). Zur Verallgemeinerung betrachtet man nun eine infinitesimale geschlossene Kurve und drückt dies über den Kommutator zweier kovarianter Ableitungen aus. Die kovariante Ableitung eines Tensors in eine bestimmte Richtung "misst" ja gerade die Abweichung relativ zu dessen Lage

im Falle eines Paralleltransports, da die kovariante Ableitung eines Tensors in die Richtung die er paralleltransportiert wird gleich Null ist. Der Kommuntator "misst" dann genau die Differenz, die auftritt, wenn der Tensor erst entlang der einen Umlaufrichtung der geschlossenen Kurve paralleltransportiert wird und dann entlang der anderen. Für ein Vektorfeld X^k im Punkt P ergibt sich damit:

$$\begin{split} [\nabla_i, \nabla_j] X^k &= \nabla_i \nabla_j X^k - \nabla_j \nabla_i X^k \\ &= \partial_i (\nabla_j X^k) - \Gamma^r_{ij} \nabla_r X^k + \Gamma^k_{is} \nabla_j X^s - (i \longleftrightarrow j)^1 \\ &= \partial_i \partial_j X^k + (\partial_i \Gamma^k_{js}) X^s + \Gamma^k_{js} \partial_i X^s - \Gamma^r_{ij} \partial_r X^k \\ &- \Gamma^r_{ij} \Gamma^k_{rs} X^s + \Gamma^k_{is} \partial_j X^s + \Gamma^k_{is} \Gamma^s_{jr} X^r - (i \longleftrightarrow j) \\ &= (\underbrace{\partial_i \Gamma^k_{js} - \partial_j \Gamma^k_{is} + \Gamma^k_{ir} \Gamma^r_{js} - \Gamma^k_{jr} \Gamma^r_{is})}_{R^k_{sii}} X^s - 2\Gamma^r_{[ij]} \nabla_r X^k \,. \end{split}$$
(6.5.4)

Der letzte Term kann mit dem Torsionstensor identifiziert werden und die linke Seite ist offensichtlich ein Tensor, der Ausdruck in Klammern R^k_{sij} , muss daher auch ein Tensor sein.

Definition 6.5.2 Der Riemannsche Krümmungstensor R ist das (1,3)-Tensorfeld, das dem Punkt $P \in M$ und den Tangentialvektoren $x, y, z \in M_p$, den Tangetialvektor R(Y,Z)X(P) mit X(P) = x, Y(P) = y, Z(P) = z zuordnet. Insgesamt wird also aus drei Vektorfeldern in trilinearer Weise ein viertes Vektorfeld. Etwas verkürzt schreiben sich die Komponenten des Krümmungstensors:

$$R^{k}_{\ sij} = 2\partial_{[i}\Gamma^{k}_{j]s} + 2\Gamma^{k}_{[i|r|}\Gamma^{r}_{j]s}.$$
(6.5.5)

Er beschreibt die oben heuristisch eingeführte Krümmung und wurde ohne Erwähnung der Metrik einzig durch einen allgemeinen Zusammenhang eingeführt, unabhähngig von Torsionsfreiheit (D4) und Metrikkompatibilität (D5). Seine Kontraktion wird als **Ricci-Tensor** bezeichnet und erneute Kontraktion als **Ricci-Skalar**.

$$R^k_{skj} = R_{sj} \quad \text{und} \quad R^j_{\ i} = R.$$
(6.5.6)

Sowohl Krümmungs-, als auch Ricci-Tensor erfüllen eine Reihe von algebraischen bzw. differentiellen Identitäten, die hier aber nicht weiter angegeben werden sollen. Mit Ricci-Tensor und Skalar lassen sich zunächst der **Einsteintensor** in kovarianter Form

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \tag{6.5.7}$$

und nach weiteren Überlegungen die **einsteinschen Feldgleichungen** in ebenfalls kovarianter Form

$$G_{ik} = \kappa T_{ik} \tag{6.5.8}$$

einführen, welche das physikalische Phänomen der Gravitation klassisch beschreiben und die Feldgleichungen der ART darstellen, wobei $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ gilt. Es handelt sich um nichtlineare, partielle Differentialgleichungen, deren Lösungen durch die Metrik angegeben werden. Der Tensor T_{ik} auf der rechten Seite heißt **Energie-Impuls-Tensor**, dessen Wirkung als "Quellterm" für die Krümmung der Raumzeit angesehen werden kann. Er beinhaltet neben der Massen-Energiedichte weitere Energieformen (z.B. den Druck, den ein Strahlungsfeld ausüben kann). Eine Änderung der durch ihn beschriebenen Energieverteilungen, hat somit eine Änderung der Raumzeitstruktur in der Umgebung dieser Energieverteilung zur Folge. Umgekehrt beeinflusst die Struktur der Krümmung der Raumzeit wiederum die dort befindliche Materie, d.h. Energie, Raum und Zeit stehen in direkter Wechselwirkung miteinander.

Literaturverzeichnis

- BELGIORNO, F.; CACCIATORI, S. L.; CLERICI, M.; GORINI, V.; ORTENZI, G.; RIZZI, L.
 ; RUBINO, E.; SALA, V. G.; FACCIO, D.: Hawking radiation from ultrashort laser pulse filaments. In: 1009.4634 (2010), September. http://arxiv.org/abs/1009.4634
- TREDER, H.-J. (Hrsg.): Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip. Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung (Berlin (GDR): Akademie-Verlag), 8 + 122 p., 1971
- [3] GREEN, Michael B.; SCHWARZ, John H.; WITTEN, Edward: Superstring Theory: Volume 2, Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology. Cambridge University Press, 1988
- [4] CARROLL, Sean: Spacetime and Geometry: Introduction to General Relativity. illustrated edition. Prentice Hall, 2003
- [5] POLLOCK, M.D.: On the Dirac Equation in curved space-time. (2010), März
- [6] CARTAN, Elie: The Theory of Spinors. Dover Publications, 1981
- [7] PENROSE, Roger: A spinor approach to general relativity. In: Annals of Physics 10 (1960), Juni, Nr. 2, S. 171–201
- [8] HLADIK, Jean: Spinors in Physics. 1. Springer, 1999
- [9] CLIFFORD, William K.; TUCKER, Robert; SMITH, Henry John S.: Mathematical Papers by William Kingdon Clifford. AMS Bookstore, 2007
- [10] GRASSMANN, Hermann: Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik. O. Wigand, 1844
- [11] HAMILTON, Sir William R.: Elements of quaternions. Longmans, Green, & co., 1866
- [12] JUNG, Florian: Geometrische Algebra und die Rolle des Clifford-Produkts in der Klassischen und Quantenmechanik. Diplomarbeit, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, 2006
- [13] GREINER, Walter.: Theoretische Physik: Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen. Deutsch (Harri), 1981
- [14] RYDER, Lewis H.: Quantum Field Theory. Cambridge University Press, 1985
- [15] DIRAC, P. A. M.: The Quantum Theory of the Electron. In: Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character 117 (1928), Februar, Nr. 778, S. 610–624
- [16] THALLER, Bernd: The Dirac Equation. and. Springer, 1992
- [17] FRANKEL, Theodore: The Geometry of Physics: An Introduction, Second Edition. 2. Cambridge University Press, 2003
- [18] FELICE, F. de ; CLARKE, C. J. S.: Relativity on Curved Manifolds. Cambridge University Press, 1992
- [19] LAWRIE, Ian D.: A Unified Grand Tour of Theoretical Physics, 2nd edition. 2nd. Taylor & Francis, 2001

- [20] GREINER, Walter; MULLER, B.; RAFELSKI, J.: Quantum Electrodynamics of Strong Fields: With an Introduction into Modern Relativistic Quantum Mechanics. 2. Springer, 1985
- [21] BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W.: Quantum Fields in Curved Space. Cambridge University Press, 1984
- [22] HAWKING, S. W.: Black hole explosions? In: Nature 248 (1974), März, Nr. 5443, S. 30–31
- [23] OLOFF, Rainer: Geometrie der Raumzeit: Eine mathematische Einführung in die Relativitätstheorie. Vieweg, 2008
- [24] EINSTEIN, A.: Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie. In: Annalen der Physik 360 (1918), Nr. 4, S. 241–244
- [25] O'DONNELL, Peter: Introduction to 2-Spinors in General Relativity. World Scientific Publishing Company, 2003
- [26] BAUM, Helga: Spin-Strukturen und Dirac-Operatoren über pseudo-riemannschen Mannigfaltigkeiten. 1981
- [27] WALD, R. M.: The Formulation of Quantum Field Theory in Curved Spacetime. In: ArXiv e-prints (2009), Juli
- [28] NYAMBUYA, G. G.: New Curved Spacetime Dirac Equations. On the Anomalous Gyromagnetic Ratio. In: Foundations of Physics 38 (2008), Juli, S. 665–677
- [29] WALD, Robert M.: General Relativity. First Edition. University Of Chicago Press, 1984
- [30] HEIDENREICH, Sebastian: Spin 1/2 Teilchen in symmetrischen Gravitationsfeldern. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2003
- [31] MARTICK, Christian: Differentialidentitäten und Erhaltungssätze in der Einstein-Cartan-Theorie. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2008
- [32] PLAUE, Matthias: Quantenmaterie in Riemann-Cartan-Räumen. Diplomarbeit, Technische Universität Berlin, 2004