Übungen zur Vorlesung "'Quantenfeldtheorie II" SS 2000

Blatt 5

6. Nichtabelsches Eichfeld

Seien $t^a, a = 1, \ldots, n$ die Erzeugenden einer nichtabelsche Liealgebra $\mathfrak{g}$

$$\left[t^a, t^b\right] = c^{ab}{}_c\, t^c$$

Man zeige:

(a) Für ein nichtabelsches Eichfeld $A^\mu = A^\mu_a t^a$ ist die Lorentzeichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

ist immer wählbar.

(b) Für beliebiges $A^\mu(x) = A^\mu_a(x) t^a$ gilt

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] \quad \Rightarrow \quad D^\mu_{ab} D^\nu_{bc} F_{c\mu\nu} = 0$$

mit $D^\mu_{ab} = \partial^\mu \delta_{ab} - A^\mu_c t^c{}_{ab}$.

(c) Gegeben sei eine Darstellung T^a der Liealgebra $\mathfrak{g}$ und die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(iD \cdot \gamma - m\right)\psi + \frac{1}{2g^2}\,\mathrm{tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)$$

mit $(D_\mu)_A^{\ B} = \partial_\mu \delta_A^{\ B} - A_{\mu a}(T^a)_A^{\ B}$, dann gilt für den Teilchenstrom

$$j_\mu(\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu T\psi$$

kein Erhaltungssatz

$$\partial^\mu j_\mu \neq 0\,.$$

Man bestimme einen Eichfeldstrom $j_\mu(A)$, so daß gilt

$$\partial^\mu j_\mu = 0$$

mit $j_\mu = j_\mu(\psi) + j_\mu(A)$.