Übungen zur Vorlesung „Quantenfeldtheorie II“ SS 2000

Blatt 2

3. Feynmansches Pfadintegral: Teilchen im Feld

Man bestimme die Übergangsamplitude für ein Teilchen im äußeren Feld $J(t)$

$$\langle\, f \,|\, i \,\rangle = \langle\, q_f, t_f \,|\, q_i, t_i \,\rangle = \int \mathcal{D}q \, \exp \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt \, L(q, \dot{q})$$

mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + Jq$$

für die beiden Fälle:

(a) $J = \text{const.}$

(b) $J = J(t)$ beliebig.

Anleitung: Man benutze, daß für $L =$ quadratische Form in q und $\dot{q}$ gilt:

$$\langle\, f \,|\, i \,\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar T}} \, \exp \frac{i}{\hbar} \mathcal{A}_{cl}(f, i)$$

wobei $T = t_f - t_i$ und $\mathcal{A}_{cl}(f, i)$ die Wirkung entlang der klassischen Bahn $q_{cl}(t)$ ist. Man zeige, daß die Lösung der klassischen Bewegungsgleichung $m\ddot{q} = J$ mit den Randbedingungen $q(t_f) = q_f$ und $q(t_i) = q_i$ lautet für

(a) $q(t) = \frac{J}{2m} t^2 + at + b$ mit geeigneten Konstanten a und b

(b)

$$q(t) = \frac{q_i(t_f - t) - q_f(t_i - t)}{T} + \frac{1}{m} \int_{t_i}^{t_f} dt' \, G(t, t') \, J(t')$$

mit der Greenschen Funktion

$$G(t, t') = -\frac{1}{T} \left\{ (t_f - t)(t' - t_i)\theta(t - t') + (t_f - t')(t - t_i)\theta(t' - t) \right\}$$

mit $\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, t') = \delta(t - t')$ und $G(t_i, t') = G(t_f, t') = 0$.