Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik 3“

Blatt 8 8.12.2010 WS 10/11

21. Polarisation **3 Punkte**

Eine ebene Welle in z-Richtung werde beschrieben durch

$$\vec{E} = \mathrm{Re}\Big(\vec{E}_0\, e^{i(kz-\omega t)}\Big)$$

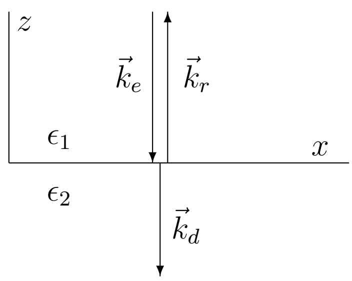
($\vec{E}_0$ beliebiger konstanter komplexer Vektor $\perp \vec{e}_z$). Trägt man $\vec{E}$ von einem festen Punkt ab, so beschreibt $\vec{E}$ als Radiusvektor eine Kurve in der x,y-Ebene. Man diskutiere diese Kurve allgemein und insbesondere Gerade und Kreis. Kann man durch Superposition von zwei Wellen mit $\vec{E} \parallel \vec{e}_x$ und $\vec{E} \parallel \vec{e}_y$ jede beliebige Polarisation erhalten? Ein Polarisationsfilter lasse $\vec{E} \parallel \vec{e}_y$ nicht hindurch, ein zweiter $\vec{E} \parallel \cos\alpha\, \vec{e}_x + \sin\alpha\, \vec{e}_y$. Welche Polarisation liegt nach Durchgang durch beide vor?

22. Reflexion

a) Man bestimme den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T für eine ebene harmonische elektromagnetische Welle, die normal zur ebenen Grenzfläche zweier Medien mit gegebenem ϵ_1 und ϵ_2 einfällt ($\mu_1 = \mu_2 = 1$). **2 Punkte**

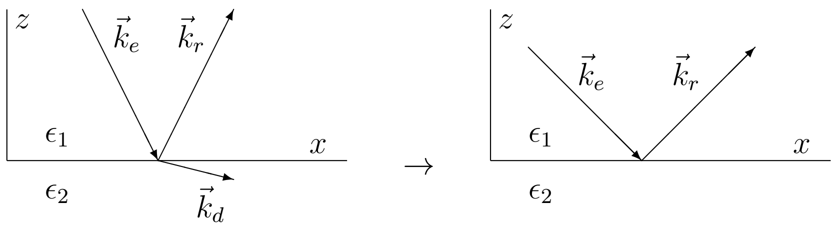
$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}_e + \vec{E}_r & \text{für } z > 0 \\ \vec{E}_d & \text{für } z < 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_e = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_{0e}\, e^{i(\vec{k}_e\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)$$
$$\vec{E}_r = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_{0r}\, e^{i(\vec{k}_r\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)$$
$$\vec{E}_d = \mathrm{Re}\left(\vec{E}_{0d}\, e^{i(\vec{k}_d\cdot\vec{r}-\omega t)}\right)$$



Anleitung: Man zeige mit Hilfe der Wellengleichung: $\vec{k}_e = -\vec{k}_r = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}\,\vec{k}_d$. Man benutze $\omega\vec{B} = \vec{k}\times\vec{E}$ und zeige, aus den Randbedingungen: $\vec{E}_t$ und $\vec{H}_t$ stetig, folgt $\vec{E}_{0e} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0d}$ und $\vec{k}_e \times (\vec{E}_{0e} - \vec{E}_{0r}) = \vec{k}_d \times \vec{E}_{0d}$. Daraus berechne man $T = (E_{0d}/E_{0e})^2$ und $R = (E_{0r}/E_{0e})^2$.

b) Man diskutiere den Fall der Totalreflektion. Wie groß ist die Eindringtiefe der Welle in das Medium jenseits der Grenzfläche? **2 Punkte**



Anleitung: Man zeige für geeignete Einfallswinkel gilt $\vec{E}_d = \mathrm{Re}\Big(\vec{E}_{0d}\, e^{i(k_{dx}x-\omega t)}\Big)e^{-\kappa|z|}$ mit $1/\kappa =$ Eindringtiefe.

Abgabetermin: Mi den 15.12. 2010 in der Vorlesung

Siehe auch: http://users.physik.fu-berlin.de/˜kamecke/lehre.html

Anleitung zur Lösung

21. Polarisation

$\vec{E}_0 = Ae^{i\alpha}\vec{e}_x + Be^{i\beta}\vec{e}_y,\ \vec{E}(0,t) = \mathrm{Re}\,\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A\cos(\omega t-\alpha) \\ E_y &= B\cos(\omega t-\beta)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{E_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{B}\right)^2 - 2\frac{E_x}{A}\frac{E_y}{B}\cos(\alpha-\beta) = \sin^2(\alpha-\beta)$$

wegen $\cos^2(\omega t-\alpha)+\cos^2(\omega t-\beta)-2\cos(\omega t-\alpha)\cos(\omega t-\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin^2(\alpha-\beta)=0$

$\cos(\alpha-\beta)=0,\ A=B$: Kreis $E_x^2+E_y^2=A^2$

$\sin(\alpha-\beta)=0$: Gerade $BE_x = \pm AE_y$

Superposition: $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$

Filter:

$$\vec{E} \to \vec{E}_1 = E_x\vec{e}_x = E_x\left(\cos\alpha\left(\vec{e}_x\cos\alpha+\vec{e}_y\sin\alpha\right)+\sin\alpha\left(\vec{e}_x\sin\alpha-\vec{e}_y\cos\alpha\right)\right)$$

$$\vec{E}_1 \to \vec{E}_2 = E_x\sin\alpha\left(\vec{e}_x\sin\alpha-\vec{e}_y\cos\alpha\right)$$

22. Reflexion

a) $\left(\triangle - \mu_0\epsilon_0\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} = \vec{k}_e = -\vec{k}_r = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}\vec{k}_d$

$\vec{k}\perp\vec{E}_{0e}\|\vec{E}_{0r}\|\vec{E}_{0d}$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{E}_{\text{tangential}}\ \text{stetig} && \Rightarrow \vec{E}_{0e}+\vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0d} \\ &\omega\vec{B} = \vec{k}\times\vec{E}\ \text{stetig} && \Rightarrow \vec{k}\times\left(\vec{E}_{0e}-\vec{E}_{0r}\right) = \vec{k}_d\times\vec{E}_{0d}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} E_{0e}+E_{0r} = E_{0d} \\ E_{0e}-E_{0r} = \frac{k_d}{k}E_{0d}\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 2E_{0e} &= (1+k_d/k)\,E_{0d} \\ 0 &= E_{0e}(1-k_d/k) - E_{0r}(1+k_d/k)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} T = \left(\dfrac{E_{0d}}{E_{0e}}\right)^2 = \dfrac{4}{\left(1+\sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}\right)^2} \\[2ex] R = \left(\dfrac{E_{0r}}{E_{0e}}\right)^2 = \dfrac{\left(1-\sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}\right)^2}{\left(1+\sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}\right)^2}\end{cases}$$

Für die Poyntingvektoren $S = |\vec{E}\times\vec{H}| = EH = EB/\mu_0 = kE^2/(\mu_0\omega)$ gilt:

$$\frac{S_d}{S_e} + \frac{S_r}{S_e} = \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}T + R = 1$$

b) $k_e = k_r = \sqrt{\epsilon_1}\omega/c,\ k_d = \sqrt{\epsilon_2}\omega/c,$

$\vec{E}_{\text{tangential}}$ stetig $\forall t \Rightarrow k_{e,x} = k_{r,x} = k_{d,x} \Rightarrow k_e\sin\alpha = k_r\sin\alpha' = k_d\sin\beta$

$$k_{d,z} = \sqrt{k_d^2 - k_{d,x}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_2-\epsilon_1\sin^2\alpha} = \begin{cases} \text{reel} & \text{falls } \epsilon_2 > \epsilon_1\sin^2\alpha \\ \pm i\kappa\ \text{imaginär} & \text{falls } \epsilon_2 < \epsilon_1\sin^2\alpha\end{cases}$$

mit $\kappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1\sin^2\alpha-\epsilon_2}$.

$$\vec{E}_d = \mathrm{Re}\,\vec{E}_{d,0}e^{i\left(\vec{k}_d\cdot\vec{r}-\omega t\right)} = \vec{E}_{d,0}\begin{cases}\cos\left(k_{d,x}x+k_{d,z}z-\omega t\right) & \text{falls } \sin^2\alpha < \epsilon_2/\epsilon_1 \\ \cos\left(k_{d,x}x-\omega t\right)e^{-\kappa|z|} & \text{falls } \sin^2\alpha > \epsilon_2/\epsilon_1\end{cases}$$

D.h. Totalreflexion, wenn $\sin^2\alpha > \epsilon_2/\epsilon_1 < 1$.

$$1/\kappa = \text{Eindringtiefe} = \frac{c}{\omega}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_1\sin^2\alpha-\epsilon_2}}$$