Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik 3“

Blatt 7   1.12.2010   WS 10/11

18. Permanente Magnetisierung

Ein magnetostatisches Feld rühre ausschließlich von einer lokalisierten Verteilung permanenter Magnetisierung her.

a) Man zeige, dass dann **1 Punkt**

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{B} \cdot \vec{H} = 0$$

b) Man gebe eine qualitative anschauliche Erklärung für dieses Resultat, z.B. am Beispiel einer homogen magnetisierten Kugel. **1 Punkt**
Hinweis: das magnetische Feld ist ähnlich wie das elektrische in Aufgabe 15, geht jedoch gegen null für $r \to \infty$ (siehe Jackson §5.10).

19. Energiesatz für elektromagnetische Wellen

a) Man diskutiere den Energiesatz für eine ebene harmonische Welle im Vakuum. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Energietransports? **2 Punkte**

Anleitung: Die Energiedichte ist gegeben durch $w = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2\right)$ und die Energiestromdichte durch den Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Man bestimme w und $\vec{S}$ für eine elektromagnetische ebene Welle $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ mit $\vec{B} = \dfrac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E}$ und zeige $\dot{w} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$. Man bestimme die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Energietransports mit $\vec{S} = w\vec{v}$.

b) Die Energiestromdichte der Sonnenstrahlung an der Erdoberfläche hat etwa den Wert von $2.2\,\mathrm{cal\,cm^{-2}\,min^{-1}}$ $(1\,\mathrm{cal} = 4.19\,\mathrm{J})$; diese Größe wird Solarkonstante genannt. Wie groß ist ihr Wert in $\mathrm{W\,m^{-2}}$? Wie groß sind hierbei die Mittelwerte der elektrischen und der magnetischen Feldstärke? Welche Leistung müßte eine Glühlampe ausstrahlen, um in 1 m Entfernung die Helligkeit der Sonnenstrahlung zu erreichen? **1 Punkt**

20. Energietransport für Leiter **2 Punkte**

Man diskutiere den Energiesatz für einen stromdurchflossenen geraden ∞-langen Leiter. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Energietransports als Funktion des Ortes? Wie groß ist diese Geschwindigkeit im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit an der Oberfläche eines 1 mm dicken Kupferdrahts? (Leitfähigkeit: $\sigma = 6,45 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1}$)

Zusatzaufgabe: Auf welchem Weg gelangt die Energie vom Kraftwerk in die Glühlampe? **1 Punkt**

Abgabetermin: Mi den 8.12. 2010 in der Vorlesung

Siehe auch: http://users.physik.fu-berlin.de/~kamecke/lehre.html

Anleitung zur Lösung

18. Permanente Magnetisierung

a)

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3x \vec{B} \cdot \vec{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \cdot \vec{H} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\vec{H} \times \vec{\nabla}\right) \cdot \vec{A}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left(\vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{H} \times \vec{A}\right)\right) = 0$$

b) außerhalb ist $\vec{B} \cdot \vec{H} = \mu_0 H^2$ positiv, innerhalb ist $\vec{H}$ (wegen $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$) antiparallel $\vec{B}$, also $\vec{B} \cdot \vec{H}$ negativ

19. Energiesatz für elektromagnetische Wellen

a) $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t),\ \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \vec{H},\ \omega = c|\vec{k}|,\ c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$
$\Rightarrow |\vec{H}| = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} |\vec{E}| = |\vec{E}|/(377\,\Omega) \Rightarrow$

$$w = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2\right) = \epsilon_0 \vec{E}^2 = \epsilon_0 \vec{E}_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = w(\chi),\ \chi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$$
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = |\vec{E}||\vec{H}|\vec{k}/k = \epsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{k}/k = wc\vec{k}/k = w\vec{v} \text{ mit } \vec{v} = c\vec{k}/k \Rightarrow \boxed{v = c}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = c\frac{\vec{k}}{k} \cdot \vec{k} w'(\chi) = -\frac{ck}{\omega}\dot{w} = -\dot{w}$$

b) $2.2\ \mathrm{cal\,cm^{-2}\,min^{-1}} = 1.5\,\mathrm{kW\,m^{-2}} = \langle|\vec{S}|\rangle = \langle|EH|\rangle = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0}\langle H^2\rangle \Rightarrow$

$$\sqrt{\langle H^2\rangle} = \sqrt{1.5\,\mathrm{kW\,m^{-2}}\,/\,(377\,\Omega)} = 2\,\mathrm{A\,m^{-1}},\quad \sqrt{\langle E^2\rangle} = (377\,\Omega)\,2\,\mathrm{A\,m^{-1}}) = 752\,\mathrm{V\,m^{-1}}$$

Leistung der Lampe $= 4\pi\,\mathrm{m}^2 \cdot 1.5\,\mathrm{kW\,m^{-2}} = 19\,\mathrm{kW}$

20. Energietransport für Leiter

$E = U/l = R \cdot I/l = l/(\pi\rho^2\sigma) \cdot I/l = I/(\pi\rho^2\sigma)$ und $H = I/(2\pi r) \Rightarrow$

$$S = EH = U/l \cdot I/(2\pi r) = UI/(2\pi r l) = \text{Leistung im Draht/Oberfläche}$$

Geschwindigkeit des Energietransports im Abstand r vom Leiter

$$v = \frac{S}{w} = \frac{EH}{\frac{1}{2}\left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \mu_0 \vec{H}^2\right)} = \frac{2c}{\left(\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}E/H + \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}H/E\right)}$$
$$= \frac{2c}{\left(\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}\frac{2r}{\rho^2\sigma} + \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}\frac{1}{2r}\rho^2\sigma\right)} = \frac{2c}{\left(\left(6 \cdot 10^6 \frac{\rho}{r}\right)^{-1} + 6 \cdot 10^6 \frac{\rho}{r}\right)} = \frac{2c\left(6 \cdot 10^6 \frac{\rho}{r}\right)^{-1}}{\left(\left(6 \cdot 10^6 \frac{\rho}{r}\right)^{-2} + 1\right)}$$

da $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}H/E = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}\frac{1}{2}\rho^2\sigma/r = (377\,\mathrm{V\,/\,A})\,\frac{1}{2}(\frac{1}{2}10^{-3}\,\mathrm{m} \cdot 6.45 \cdot 10^7\,\Omega^{-1}\,\mathrm{m}^{-1})\frac{\rho}{r} = 6 \cdot 10^6 \frac{\rho}{r}$
für $r = \rho$

$$v = \frac{2c}{6 \cdot 10^6} = 100\,\mathrm{m\,/\,s}$$

Zusatzaufgabe: durch den Raum in der Umgebung der Leiter, da dort $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \neq 0$.