Übungen zur Vorlesung „Theoretische Physik 3“

Blatt 1 18.10.2010 WS 10/11

1. Coulombpotential

Gegeben sei das elektrische Feld einer Punktladung im Vakuum am Ort 0

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

a) Man zeige: rot $\vec{E} = 0$ und man bestimme das Potential 1 Punkt

$$\phi(\vec{r}\,) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} d\vec{r}\,'\vec{E}(\vec{r}\,')$$

b) Man verifiziere 1 Punkt

$$\vec{E}(\vec{r}\,) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}\,)\,.$$

c) Man zeige: 1 Punkt

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \text{ und } -\triangle\phi = 0 \text{ für } \vec{r} \neq 0$$

d) Die Diracsche δ-Funktion sei definiert durch: 1 Punkt

$$\int_V d^3x\ \delta^{(3)}(\vec{r}\,) = \begin{cases} 0 \text{ falls } 0 \notin V \\ 1 \text{ falls } 0 \in V \end{cases}, \quad \text{d.h.} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\ \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)f(\vec{r}\,) = f(\vec{r}_0)\,.$$

(Beachte: Die Diracsche δ-Funktion ist keine Funktion sondern eine Distribution!)

Man zeige:

$$\boxed{\triangle\frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r}\,)}$$

d.h. mit $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ gilt

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = -\epsilon_0\triangle\phi = q\delta^{(3)}(\vec{r}\,)\,.$$

Anleitung: Man benutze c) und den Gaußschen Satz für eine Kugel K um 0 und zeige

$$\int_K d^3x\,\mathrm{div}\,\vec{r}\,|\vec{r}\,|^{-3} = \int_{\partial K} d\vec{f}\cdot\vec{r}\,|\vec{r}\,|^{-3} = 4\pi.$$

2. Vektorrechnung

Man zeige: 2 Punkte

rot grad $\phi = 0$
div rot $\vec{A} = 0$
rot rot $\vec{A} =$ grad div $\vec{A} - \triangle\vec{A}$, mit $\triangle = \vec{\nabla}^2$
div $(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}$ rot $\vec{A} - \vec{A}$ rot $\vec{B}$

Abgabetermin: Mi den 27. 10. 2010 in der Vorlesung

Siehe auch: http://users.physik.fu-berlin.de/˜kamecke/lehre.html

Anleitung zur Lösung

1. Coulombpotential

Es gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$
$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$$
$$\vec{\nabla} r^{-1} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

a)

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = r^{-3}\vec{\nabla} \times \vec{r} - 3r^{-4}\left(\vec{\nabla} r\right) \times \vec{r} = 0$$

oder

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} r^{-1} = 0$$

$$\phi(\vec{r}\,) = -\int_\infty^{\vec{r}} d\vec{r}\,'\vec{E}(\vec{r}\,') = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^{\vec{r}} d\vec{r}\,'\frac{\vec{r}\,'}{r'^3} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^{r} dr'\frac{1}{r'^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

b)

$$-\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

c) $\vec{r} \neq 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = r^{-3}\vec{\nabla} \cdot \vec{r} - 3r^{-4}\left(\vec{\nabla} r\right) \cdot \vec{r} = 3r^{-3} - 3r^{-4}\vec{r}/r \cdot \vec{r} = 0$$
$$\Delta\frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

d) falls $0 \notin V$ wegen c)

$$\int_V d^3x \,\triangle\frac{1}{r} = 0$$

falls $0 \in V$ wegen c)

$$\int_V d^3x \,\triangle\frac{1}{r} = \int_K d^3x \;\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\int_{\partial K} d\vec{f} \cdot \vec{r}\,|\vec{r}\,|^{-3} = -\int_{\partial K} df \cdot r^{\,-2} = -4\pi.$$

$K = \{\vec{r}; r \leq r_0\}$

2. Vektorrechnung

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\right)\vec{A} = 0$$
$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{A}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{B}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) - \vec{A}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right)$$