IL NUOVO CIMENTO Vol. XI, N. 4 1° Aprile 1954

Über Eigenschaften von Ausbreitungsfunktionen und Renormierungskonstanten quantisierter Felder.

H. Lehmann

Max-Planck-Institut für Physik - Göttingen, Deutschland

(ricevuto il 22 Gennaio 1954)

Summary. — It is attempted to derive some general properties of the propagation functions for coupled fields (Δ_F', S_F') without the use of power series expansions and to show their connection with the renormalization constants for field operators and masses. Assuming that the coupled functions exist, it appears possible to discuss their behavior near the light-cone (or for large momenta) and to obtain some information about the singularities of these functions when continued analytically. Attempts at the treatment of unrenormalizable theories are criticised on the basis of these results. Formulae are given for the mentioned renormalization constants which contain inequalities for the constants Z_2 and Z_3. Finally it is pointed out that the methods introduced are advantageous also for computations by means of power series expansion. As an example the lowest order correction to the S_F-function in pseudoscalar meson theory is calculated without the appearance of infinite terms during the calculation.

Einleitung.

In neueren Arbeiten zur Behandlung von Wechselwirkungsproblemen im Rahmen quantisierter Feldtheorien spielen die als Ausbreitungsfunktionen (oder als Greensche Funktionen) bezeichneten Größen Δ_F' und S_F' eine bedeutsame Rolle. Diese Größen sollten sich im Prinzip aus den Grundgleichungen der Theorien berechnen lassen; bislang sind jedoch nur störungstheoretische Näherungen bekannt, die vermutlich — mit Ausnahme der Quantenelektrodynamik — völlig unzureichend sind. Es erscheint deshalb der Versuch angebracht, Aussagen über diese Funktionen zu gewinnen, ohne dabei die Möglichkeit der Entwicklung nach einem Kopplungsparameter vorauszusetzen oder zu benutzen. Hiermit beschäftigt sich der erste Abschnitt dieser Arbeit. Die hauptsächlichen Ergebnisse sind dabei: Die Ableitung von Formeln, die eine Darstellung der genannten Funktionen als Überlagerung von Ausbreitungsfunktionen freier Felder mit verschiedenen Massen ermöglichen und die sich hieraus ergebenden Folgerungen. Diese betreffen insbesondere das Verhalten der $\Delta'_F(x)$ und $S'_F(x)$ Funktionen für kleine Werte von x^2, bzw. das Verhalten ihrer Fouriertransformierten für große Impulse.

Im zweiten Teil wird gezeigt, daß sich die bei der Renormierung von Feldoperatoren und Massen auftretenden Konstanten in einfacher Weise durch die zur Darstellung der Ausbreitungsfunktionen eingeführten Größen ausdrücken lassen. Man erhält so Gleichungen, die unabhängig von der Störungsrechnung sind und zu einigen Aussagen über diese Konstanten führen. Im Gegensatz zu anderen Darstellungen wird dabei die Benutzung einlaufender Felder vermieden.

Abschließend wird zur Illustration der verwendeten Methoden eine störungstheoretische Berechnung der im 1. Abschnitt eingeführten Größen vorgenommen.

Es sei noch auf zwei Punkte hingewiesen:

Einmal ist bislang nicht bekannt, ob die Grundgleichungen irgendeiner quantisierten Feldtheorie (mit Ausnahme freier Felder) Lösungen besitzen. Wir gehen auf diese Frage nicht ein, sondern bemühen uns um Aussagen über die Ausbreitungsfunktionen unter der Annahme, daß diese existieren. Zum andern ist es zur Ableitung allgemeiner Resultate unerläßlich, mit Funktionen zu operieren, die nicht explizit bekannt sind. Manche der vorgenommenen mathematischen Umformungen (insbesondere Vertauschung von Integrationsreihenfolgen) haben deshalb formalen Charakter; ihre Berechtigung könnte wohl nur durch Ausführung detaillierter Rechnungen gezeigt werden.

1. – Eigenschaften der Ausbreitungsfunktionen.

a) Skalare Felder. – Um die Eigenschaften der Ausbreitungsfunktionen zu untersuchen, erweist es sich als zweckmäßig, neben Δ'_F weitere Funktionen einzuführen, die alle als Vakuumerwartungswerte von Heisenbergoperatoren definiert werden können. Die Situation ist hier ähnlich wie bei einem freien Feld, wo man üblicherweise von der Vertauschungsfunktion Δ sowie von $\Delta^{(1)}$ ausgeht und dann leicht zur Δ_F-Funktion übergehen kann.

Es soll zunächst ein hermitisches skalares Feld $A(x)$ betrachtet werden, das mit sich selbst in nichtlinearer Weise gekoppelt sein kann oder auch mit anderen (Bose- oder Fermi-) Feldern in Wechselwirkung stehen darf. Über die Art der Kopplung werden keine speziellen Voraussetzungen gemacht; sie kann lokal oder nichtlokal sein. Vorausgesetzt wird, daß die betrachtete Theorie lorentz-invariant ist. Demzufolge soll ein Energie-Impulsvierervektor P_μ existieren mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu} = i\left[A(x), P_\mu\right]; \qquad \left[P_\mu, P_\nu\right] = 0. \tag{1}$$

Weiterhin wird angenommen, daß man einen Vakuumzustand definieren kann; d.h. der Energieoperator soll einen kleinsten Eigenwert besitzen, den wir auf Null normieren.

Die Kenntnis von Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren ist zunächst nicht erforderlich; es genügt die Beziehung (1).

Wir wollen jetzt die Vakuumerwartungswerte bilinearer Feldgrößen betrachten. Als Orthogonalsystem im Hilbertraum werden dabei die gemeinsamen Eigenvektoren der Operatoren P_μ benutzt, die ein vollständiges System bilden sollen. Es gilt also

$$P_\mu \Phi_k = k_\mu \Phi_k \qquad (k_0 \geqq 0). \tag{2}$$

Die Eigenwerte k_μ können natürlich entartet sein.

In völliger Analogie zu einem freien Feld führen wir folgende Funktionen ein:

$$\left\{\begin{aligned}
(\Phi_0, A(x)A(x')\Phi_0) &= \langle A(x)A(x')\rangle_0 = i\Delta^{(+)\prime}(x-x') \\
\langle A(x')A(x)\rangle_0 &= -i\Delta^{(-)\prime}(x-x') \\
\langle [A(x), A(x')]\rangle_0 &= i\Delta'(x-x') = -2i\varepsilon(x_0-x_0')\bar{\Delta}'(x-x') \\
\langle \{A(x), A(x')\}\rangle_0 &= \Delta^{(1)\prime}(x-x') \\
\langle TA(x)A(x')\rangle_0 &= \tfrac{1}{2}\Delta_F'(x-x').
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Aus diesen Definitionsgleichungen der Vakuumfunktionen folgt, daß zwischen ihnen dieselben Zusammenhänge bestehen, wie bei einem freien Feld. Man kann z.B. alle Funktionen durch $\Delta^{(+)\prime}$ ausdrücken. Für die Ausbreitungsfunktion gilt: $\left[\theta(x_0) = \tfrac{1}{2}(1 + x_0/|x_0|)\right]$

$$\Delta_F'(x) = 2i\left[\theta(x_0)\Delta^{(+)\prime}(x) - \theta(-x_0)\Delta^{(-)\prime}(x)\right] = \Delta^{(1)\prime}(x) - 2i\bar{\Delta}'(x). \tag{4}$$

Die Funktionen $\Delta^{(+)\prime}$ bzw. $\Delta^{(-)\prime}$ enthalten nur positive bzw. negative Frequenzen (sh. unten), so daß Δ_F' in derselben Weise wie bei einem freien Feld als eine kausale Funktion interpretiert werden kann. Um Aufschlüsse über die Struktur dieser Funktionen zu erhalten, betrachten wir die $\Delta^{(+)\prime}$-Funktion.

$$\begin{aligned}
\langle A(x)A(x')\rangle_0 &= \sum_k (\Phi_0, A(x)\Phi_k)(\Phi_k, A(x')\Phi_0) \\
&= \sum_k A_{0k}(x)A_{k0}(x') = \sum_k a_{0k}a_{0k}^* \exp\left[ik(x-x')\right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei ist $(\Phi_0, A(x)\Phi_k) = A_{0k}(x) = a_{0k}\exp\left[ikx\right]$ gesetzt worden.

Die Möglichkeit dieser Umformung folgt in bekannter Weise aus

$$\frac{\partial A_{0k}(x)}{\partial x_\mu} = i\left(\Phi_0, [A(x), P_\mu]\Phi_k\right) = ik_\mu A_{0k}(x).$$

Die Summation in (5) ist über alle Zustände zu erstrecken.

Wir führen nun eine Funktion

$$\varrho(-k^2) = (2\pi)^3 \sum a_{0k} a_{0k}^* . \tag{6}$$

ein. Summiert wird hier über alle Zustände, die zum Eigenwert k_μ gehören.

Aus den Gleichungen (3), (5) und (6) folgt jetzt ([1]):

$$\Delta^{(+)\prime}(x-x') = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \theta(k_0)\varrho(-k^2)\exp\left[ik(x-x')\right]\mathrm{d}^4k . \tag{7}$$

Dabei ist die Summation über die Eigenwerte durch eine Integration ersetzt worden, unter Beachtung des Umstandes, daß für alle Eigenwerte $k_0 \geqslant 0$ gilt.

Wir setzen in (7)

$$\varrho(-k^2) = \int_0^\infty \varrho(\varkappa^2)\,\delta(k^2+\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2),$$

und erhalten

$$\Delta^{(+)\prime}(x) = \int_0^\infty \Delta^{(+)}(x;\varkappa^2)\varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2) . \tag{8}$$

Analoge Formeln gelten für alle Vakuumfunktionen (im folgenden mit $\Delta^{(\ )\prime}$ bezeichnet), da diese sich gemäß (3) in linearer Weise aus $\Delta^{(+)\prime}$ bilden lassen. Es ist also:

$$\Delta^{(\ )\prime}(x) = \int_0^\infty \Delta^{(\ )}(x;\varkappa^2)\varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2) . \tag{9}$$

Die « gestrichenen » Funktionen lassen sich demnach durch lineare Überlagerung der entsprechenden freien Funktionen mit einer Massendichte $\varrho(\varkappa^2)$ darstellen ([2]).

Wir haben zur Ableitung der Formel (9) bereits benutzt, daß ϱ nur vom Argument k_μ^2 abhängt und für $k_\mu^2 > 0$ identisch Null ist. Beide Eigenschaften

---

([1]) Darstellungen ähnlicher Art für Vakuumerwartungswerte von Feldoperatoren sind von G. Källén: *Helv. Phys. Acta*, 25, 417 (1952) benutzt worden.

([2]) Diese Darstellung hat eine formale Ähnlichkeit mit den Methoden der Regularisierung (W. Pauli und F. Villars: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949)). Jedoch ist hier $\varrho \geqslant 0$; d.h. die Regularisierungsbedingungen sind nicht erfüllt.

folgen aus der Lorentzinvarianz; andernfalls würden die Vakuumfunktionen (insbesondere die Vertauschungsfunktion Δ') keine invarianten Größen sein. Weiter folgt aus der Definitionsgleichung (6), daß ϱ eine positive Funktion ist. Es gilt

$$\varrho(\varkappa^2) \geqslant 0 \,. \tag{10}$$

Für den Spezialfall eines freien Feldes der Masse m ist natürlich $\varrho(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2 - m^2)$. Allgemein werden die diskreten Eigenwerte des Operators P_μ^2 zu δ-Funktionen in $\varrho(\varkappa^2)$ Anlaß geben, sofern nicht die Matrixelemente des Operators $A(x)$ zwischen dem Vakuum und den entsprechenden Zuständen (z. B. auf Grund von Auswahlregeln) verschwinden. Die diskreten Eigenwerte von P_μ^2 entsprechen den stabilen Teilchen, die von der Theorie geliefert werden. Von einer physikalisch sinnvollen Theorie wird man erwarten, daß sie mindestens ein stabiles Teilchen beschreibt, d.h. ϱ wird mindestens eine δ-Funktion enthalten. Falls sonst keine stabilen Teilchen auftreten, so gilt

$$\varrho(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2 - m^2) + \sigma(\varkappa^2)\,; \qquad \sigma(\varkappa^2) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqslant \varkappa^2 < (2m)^2,$$

wo $\sigma(\varkappa^2)$ frei von δ-Funktionen ist. Diese Struktur entspricht dem Umstand, daß in einem solchen Fall der Operator P_μ^2 einen diskreten Eigenwert besitzt, dem sich ein Kontinuum anschließt, wenn mindestens zwei Teilchen vorhanden sind ([3]).

Aus der Gleichung (9) und den eben angegebenen Eigenschaften der Funktion ϱ lassen sich verschiedene Folgerungen ziehen. Zunächst ist klar, daß (9) auch im Fourierraum gilt. ϱ ist also — bis auf einen Faktor — gleich der Transformierten der $\Delta^{(1)\prime}$- Funktion

$$\varrho(-k^2) = \frac{1}{2\pi}\,\Delta^{(1)\prime}(k^2)\,. \tag{11}$$

Weiter gilt z.B.

$$\Delta_F'(k^2) = -2i\int\limits_0^\infty \frac{\varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)}{k^2+\varkappa^2-i\varepsilon} \qquad (\lim \varepsilon \to +0)\,. \tag{12}$$

Mit den angegebenen Beziehungen läßt sich jetzt das Verhalten der $\Delta^{(\ )\prime}$- Funktionen in der Nähe des Lichtkegels, bzw. das ihrer Fouriertransformierten für große Werte von k^2 übersehen, da das Verhalten der «freien»

([3]) Das ist natürlich auch bei einem freien Feld der Fall. Dann ist jedoch $\sigma(\varkappa^2)$ identisch Null, da die entsprechenden Matrixelemente des Operators $A(x)$ verschwinden.

Funktionen bekannt ist und nicht von der Masse abhängt. So erhält man z.B.

$$\overline{\Delta}'(x) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \{\delta(x^2) + \ldots\}\varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2) = \frac{1}{4\pi}\,\delta(x^2)\int_0^\infty \varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2) + \ldots \tag{13}$$

und im Impulsraum

$$\overline{\Delta}'(k^2) = P\int_0^\infty \frac{\varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)}{k^2+\varkappa^2} = \frac{1}{k^2}\int_0^\infty \varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2) + \ldots \tag{14}$$

falls die dabei abgespaltenen Integrale konvergieren.

Die gestrichenen Funktionen haben also entweder das gleiche Verhalten wie die entsprechenden freien Funktionen, oder aber — falls $\int_0^\infty \varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)$ nicht konvergiert — sie sind am Lichtkegel stärker singulär (bzw. fallen für große Impulse schwächer ab) als die freien Funktionen. Hingegen ist es nicht möglich, daß die gestrichenen Funktionen weniger singulär sind als die freien Funktionen, da wegen Gl. (10) $\int_0^\infty \varrho\,\mathrm{d}(\varkappa^2) > 0$ ist. Es wird sich zeigen, dass die Frage nach der Konvergenz von $\int_0^\infty \varrho\,\mathrm{d}(\varkappa^2)$ für renormierbare Theorien gleichbedeutend ist mit der Frage, ob die Renormierungskonstanten für die Feldoperatoren endlich sind.

Damit die Funktion Δ_F' überhaupt existiert, ist gemäß (12) offenbar notwendig, daß das Integral

$$\int^\infty \frac{\varrho(\varkappa^2)}{\varkappa^2}\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,,$$

an der oberen Grenze konvergiert.

Eine weitere Folgerung betrifft die Eigenschaften der Funktion $\Delta_F'(k^2)$ bei analytischer Fortsetzung in der k_μ^2-Ebene. Es ist für reelle k^2

$$\Delta_F'(k^2) = \Delta^{(1)\prime}(k^2) - i2\overline{\Delta}'(k^2).$$

Weiter gilt:

$$2\overline{\Delta}'(k^2) = \frac{1}{\pi}P\int_0^\infty \frac{\Delta^{(1)\prime}(l^2)\,\mathrm{d}(-l^2)}{k^2-l^2}\;;\quad \Delta^{(1)\prime}(k^2) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^\infty \frac{2\overline{\Delta}'(l^2)\,\mathrm{d}(-l^2)}{k^2-l^2}\;[4]. \tag{15}$$

---

[4] Diese Gleichung folgt durch Umkehrung der vorangehenden Integralbeziehung oder aus den Definitionsgleichungen (3) der Vakuumfunktionen.

Die Funktionen $\Delta^{(1)\prime}(k^2)$ und $2\bar{\Delta}'(k^2)$ sind also konjugiert zueinander im Sinne der Hilbert-Transformation (⁵). Demzufolge läßt sich (unter einigen Voraussetzungen) die Funktion $\Delta'_F(k^2)$ analytisch fortsetzen und ist regulär in der unteren Halbebene (⁵). Dieses Resultat ist befriedigend, da das Auftreten von Polen in diesem Gebiet zu neuen (nichtrenormierbaren) Divergenzen (z. B. der S-Matrixelemente) führen könnte (⁶). Unsere Betrachtung zeigt jedoch, daß bei Benutzung der exakten Δ'_F-Funktion solche Schwierigkeiten nicht auftreten sollten. Dies gilt auch für die gleich zu besprechende S'_F-Funktion.

Wir wollen nun eine Folgerung für die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen ziehen und benutzen dazu die Darstellung (9) für die Δ'-Funktion.

$$\Delta'(x) = \int_0^\infty \Delta(x;\varkappa^2)\varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,.$$

Es folgt unmittelbar:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\langle[A(\boldsymbol{x},t),A(\boldsymbol{x}',t)]\rangle_0 = \langle[\dot{A}(\boldsymbol{x},t),\dot{A}(\boldsymbol{x}',t)]\rangle_0 = 0\,,\\ &\langle[\dot{A}(\boldsymbol{x},t),A(\boldsymbol{x}',t)]\rangle_0 = -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\int_0^\infty \varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,.\end{aligned}\right.$$

Die gleichzeitigen V. R. zwischen den Operatoren A und $\dot{A}$ für den Vakuumzustand lassen sich demnach (bis auf einen Faktor) aus der Gleichung (1) ableiten. Die Operatoren sind für raumartige Punkte stets vertauschbar, und es tritt notwendig die Diracsche δ-Funktion auf. Dies gilt seiner Herleitung nach auch für Theorien mit nichtlokaler Wechselwirkung (⁷). Für Spinorfelder wird sich derselbe Sachverhalt ergeben.

Zur Gleichung (16) bemerken wir noch, daß danach bei Vorgabe der üblichen Vertauschungsrelation $[\dot{A}(\boldsymbol{x}),A(\boldsymbol{x}')] = -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$, $\int_0^\infty \varrho\,\mathrm{d}(\varkappa^2) = 1$ wäre. Die hier betrachteten Vakuumfunktionen sollen sich jedoch auf renormierte Operatoren beziehen, zu denen man bekanntlich übergehen muß. Wir gehen darauf im 2. Abschnitt genauer ein.

b) *Spinorfelder.* – Wir betrachten jetzt ein Spinorfeld unter denselben Voraussetzungen, wie sie für das schon behandelte skalare Feld gemacht

(⁵) Vgl. etwa E. C. TITCHMARSH: *Theory of Fourier Integrals* (Oxford, 1937), Chap. V.

(⁶) In einer Arbeit von G. FELDMAN: *Modified propagators in field theory* – preprint-wird auf Grund von Näherungsformeln für die Ausbreitungsfunktionen die Existenz derartiger Pole vermutet und ihre Auswirkung diskutiert.

(⁷) Z.B. die Theorie von P. KRISTENSEN und C. MØLLER: *Dan. Mat. Fys. Medd.*, 27, no. 7 (1952).

wurden. Ausserdem fordern wir die Invarianz der Theorie gegen Teilchen-Antiteilchenkonjugation. Das Vorgehen und die Resultate sind naturgemäß ähnlich wie bei einem skalaren Feld.

Wir beginnen wieder mit der Definition von Vakuumfunktionen:

$$
(17) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
\langle \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\rangle_0 = -iS^{(+)'}_{\alpha\beta}(x-x'); & \langle \bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\rangle_0 = -iS^{(-)'}_{\alpha\beta}(x-x') \\
\langle \{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')\}\rangle_0 = -iS'_{\alpha\beta}(x-x'); & \langle [\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')]\rangle_0 = -S^{(1)'}_{\alpha\beta}(x-x') \\
\multicolumn{2}{c}{\langle T\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\rangle_0 = -\tfrac{1}{2}\, S'_{F\alpha\beta}(x-x') .}
\end{array} \right.
$$

Aus der Invarianz gegen Teilchen-Antiteilchenkonjugation folgt

$$\langle \bar{\psi}_\beta(x')\psi_\alpha(x)\rangle_0 = \langle \bar{\psi}'_\beta(x')\psi'_\alpha(x)\rangle_0 = -C^{-1}_{\beta\gamma}\langle \psi_\gamma(x')\bar{\psi}_\delta(x)\rangle_0 C_{\delta\alpha} .$$

Demnach:

$$(17a) \qquad S^{(-)'}_{\alpha\beta}(x-x') = -C^{-1}_{\beta\gamma} S^{(+)'}_{\gamma\delta}(x'-x) C_{\delta\alpha} .$$

Man kann also alle Funktionen durch $S^{(+)'}$ ausdrücken. Nun ist

$$(18) \quad \langle \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(x')\rangle_0 = \sum_k (\Phi_0, \psi_\alpha(x)\Phi_k)(\Phi_k, \bar{\psi}_\beta(x')\Phi_0) = \sum_k c^\alpha_{0k}\bar{c}^\beta_{0k} \exp[ik(x-x')].$$

Zunächst soll wieder die Summation über diejenigen Zustände ausgeführt werden, die zum Eigenwert k_μ gehören. Dementsprechend führen wir zwei Funktionen ϱ_1 und ϱ_2 ein:

$$(19) \qquad (i\gamma_{\alpha\beta}k - \sqrt{-k^2}\,\delta_{\alpha\beta})\varrho_1(-k^2) + \delta_{\alpha\beta}\varrho_2(-k^2) = -(2\pi)^3 \sum c^\alpha_{0k}\bar{c}^\beta_{0k} .$$

Wegen der relativistischen Invarianz der Theorie kann der Ausdruck (19) nur in der angegebenen Weise von γ-Matrizen abhängen. Die Aufteilung der γ-freien Anteile auf ϱ_1 und ϱ_2 ist natürlich willkürlich.

Genau wie im skalaren Fall folgt jetzt

$$(20) \quad S^{(+)'}(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int \theta(k_0)\{(i\gamma k - \sqrt{-k^2})\varrho_1(-k^2) + \varrho_2(-k^2)\}\exp[ikx]\,d^4k =$$
$$= \int_0^\infty \{S^{(+)}(x;\varkappa)\varrho_1(\varkappa^2) + \Delta^{(+)}(x;\varkappa)\varrho_2(\varkappa^2)\}\, d(\varkappa^2) .$$

Eine entsprechende Darstellung gilt gemäß (17) und (17a) für alle gestrichenen Funktionen:

$$(21) \qquad S^{(\;)'}(x) = \int_0^\infty \{S^{(\;)}(x;\varkappa)\varrho_1(\varkappa^2) + \Delta^{(\;)}(x;\varkappa^2)\varrho_2(\varkappa^2)\}\, d(\varkappa^2) .$$

Für ϱ_1 und ϱ_2 folgt aus (19) unmittelbar, daß beide Funktionen reell sind. Weiterhin wollen wir folgende Ungleichungen beweisen:

$$\varrho_1(\varkappa^2) \geqslant 0; \qquad 0 \leqslant \varrho_2(\varkappa^2) \leqslant 2\varkappa\varrho_1(\varkappa^2)\,. \tag{22}$$

Hierzu multiplizieren wir in (19) von links mit $i\gamma k + \alpha$ von rechts mit $(i\gamma k + \alpha)\gamma_4$ und erhalten $(f_{0k} = (i\gamma k + \alpha)c_{0k})$

$$\sum_\beta f^\beta_{0k} f^{*\beta}_{0k} = k_0\left[(\varkappa - \alpha)^2\varrho_1 + 2\alpha\varrho_2\right] \geqslant 0; \qquad (\varkappa^2 = -k^2)\,.$$

Diese Ungleichung gilt für beliebiges reelles α. Wegen $k_0 > 0$ ist

$$(\varkappa - \alpha)^2\varrho_1 + 2\alpha\varrho_2 \geqslant 0\,. \tag{22a}$$

Für $\alpha = 0$ folgt

$$\varrho_1 \geqslant 0\,.$$

Das Minimum von (22*a*) als Funktion von α wird für $\alpha = (\varkappa\varrho_1 - \varrho_2)/\varrho_1$ eingenommen. Einsetzen diese Wertes liefert

$$\varrho_2(2\varkappa\varrho_1 - \varrho_2) \geqslant 0\,.$$

Dies führt direkt auf die angegebenen Ungleichungen für ϱ_2.

Für ein freies Spinorfeld ist $\varrho_1(\varkappa^2) = \delta(\varkappa^2 - M^2)$; $\varrho_2(\varkappa^2) \equiv 0$. Allgemein wird die Funktion ϱ_1 (da die Theorie mindestens ein stabiles Teilchen vom Spin $1/2$ beschreiben sollte) mindestens eine δ-Funktion enthalten.

Mit Hilfe der Gleichungen (21) und (22) kann man jetzt ähnliche Folgerungen ziehen wie im skalaren Fall. Im Impulsraum gilt z.B.

$$S'_F(k) = -2i\int_0^\infty \frac{(i\gamma k - \varkappa)\varrho_1(\varkappa^2) + \varrho_2(\varkappa^2)}{k^2 + \varkappa^2 - i\varepsilon}\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,. \tag{23}$$

Weiter kann man wieder auf das Verhalten der gestrichenen Funktionen in der Nähe des Lichtkegels, bzw. für große Impulse schließen. Da $\varrho_1 \geqslant 0$ ist, haben die gestrichenen Funktionen entweder das gleiche Verhalten wie die freien Funktionen, oder sie sind — falls $\int_0^\infty \varrho_1\,\mathrm{d}(\varkappa^2)$ nicht konvergiert — stärker singulär.

Die Schlüsse hinsichtlich des Verhaltens der Ausbreitungfunktion bei analytischer Fortsetzung lassen sich ebenfalls wie im skalaren Fall ziehen.

Wenn man S'_F in der Form $S'_F(k) = i\gamma k f_1(k^2) + f_2(k^2)$ schreibt, so sind Real- und Imaginärteil der Funktionen $f_i(k^2)$ zueinander konjugiert gemäß der Hilberttransformation. Bei Fortsetzung werden die Funktionen also in der unteren Halbebene regulär sein.

Schließlich erhält man für den gleichzeitigen Antikommutator aus der Formel (21) für die S'-Funktion:

$$(24) \qquad \left\langle \{\psi_\alpha(\boldsymbol{x}, t), \bar{\psi}_\beta(\boldsymbol{x}', t)\} \right\rangle_0 = \gamma^4_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') \int\limits_0^\infty \varrho_1(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,.$$

c) *Bemerkung zur Behandlung nichtrenormierbarer Theorien.* – Wir fügen hier eine Bemerkung ein hinsichtlich der Versuche ([8]), in nichtrenormierbaren Theorien konvergente Resultate zu erhalten. Bei diesen Methoden wird so vorgegangen, daß man zur Berechnung von S-Matrixelementen die Δ_F- bzw. S_F-Funktion durch die näherungsweise bestimmte Δ'_F-bzw. S'_F-Funktion ersetzt. Dem Verfahren liegt die Hoffnung zugrunde, daß infolge der Feldrückwirkung die gestrichenen Funktionen weniger singulär sind als die entsprechenden freien Funktionen. Tatsächlich erhält man mit dem üblichen Berechnungsschema (Berücksichtigung der irreduziblen Selbstenergiegraphen bis zu einer bestimmten Ordnung in der Kopplungskonstanten) Funktionen, die für große Impulse stark abfallen.

Unsere Ergebnisse zeigen jedoch, daß dies für die exakten Ausbreitungsfunktionen nicht der Fall ist; vielmehr ist das benutzte Näherungsverfahren ungeeignet zur Wiedergabe des asymptotischen Verhaltens der exakten Funktionen. Wir glauben deshalb nicht, daß die erwähnten Versuche sich zu einem konsequenten Verfahren ausbauen lassen.

2. – Renormierungskonstanten.

Der folgende Abschnitt soll dazu dienen, die im Zuge der Renormierung von Feldoperatoren und Massen auftretenden Konstanten durch die vorhin eingeführten Funktionen $\varrho(\varkappa^2)$ auszudrücken. Wir führen dies am Beispiel der pseudoskalaren Kopplung eines neutralen Mesonfeldes $A(x)$ an ein Spinorfeld $\psi(x)$ durch.

Aus der üblichen Lagrangefunktion, die unrenormierte Feldoperatoren

---

([8]) N. Hu: *Phys. Rev.*, **80**, 1109 (1950); S. Kamefuchi und H. Umezawa: *Prog. Theor. Phys.*, **9**, 529 (1953).

$(A_u(x),\ \psi_u(x))$, Massen (M_0, m_0) und eine unrenormierte Kopplungskonstante (g_0) enthält, ergibt sich durch die Einführung renormierter Größen ([9])

$$(25)\qquad \begin{cases} \psi(x) = Z_2^{-\frac{1}{2}}\cdot\psi_u(x); & A(x) = Z_3^{-\frac{1}{2}}A_u(x) \\ M = M_0 + \delta M; & m^2 = m_0^2 + \delta m^2; \qquad g = Z_1^{-1}Z_2Z_3^{\frac{1}{2}}g_0\,, \end{cases}$$

$$(26)\qquad L = \begin{cases} -\frac{1}{4}Z_2\{[\bar\psi,(\gamma\partial + M)\psi] - [(\gamma^T\partial - M)\bar\psi,\psi]\} - \\ \qquad\qquad -\frac{1}{2}Z_3\{\partial_\nu A\partial_\nu A + m^2A^2\} \\ -i/2\, gZ_1[\bar\psi,\gamma_5\psi]A + \frac{1}{2}Z_2\,\delta M[\bar\psi,\psi] + \frac{1}{2}Z_3\delta m^2A^2\,. \end{cases}$$

Die renormierten Operatoren genügen demnach den Feldgleichungen

$$(27)\qquad \begin{cases} (\Box - m^2)A(x) = \dfrac{ig}{2}Z_1Z_3^{-1}[\bar\psi,\gamma_5\psi] - \delta m^2A \\ \left(\gamma\dfrac{\partial}{\partial x} + M\right)\psi(x) = -igZ_1Z_2^{-1}\gamma_5A\psi + \delta M\psi\,. \end{cases}$$

Die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen lauten:

$$(28)\qquad \begin{cases} [A(x),\dot A(x')] = -i\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot Z_3^{-1} \\ \{\psi_\alpha(x),\bar\psi_\beta(x')\} = \gamma^4_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot Z_2^{-1}. \end{cases}$$

Alle übrigen Kommutatoren (bzw. Antikommutatoren) verschwinden für gleiche Zeiten.

Nach (25) und den früher gegebenen Definitionsgleichungen der Funktionen $\varrho(\varkappa^2)$ gehen die Konstanten Z_3 bew. Z_2 einfach als multiplikative Faktoren in die Funktionen ϱ (bzw. ϱ_1 und ϱ_2) ein. Wir müssen uns zunächst mit der Frage beschäftigen, wodurch die Konstanten Z_2 und Z_3 festgelegt sind. Hierzu beachten wir, daß die Theorie — falls sie physikalisch sinnvoll ist — mindestens zwei stabile Teilchen beschreiben muß; d.h. der Operator P_μ^2 muß einen diskreten Eigenwert zur Nukleonenzahl 0 mit der Masse m (exp. Masse des Mesons) und einen diskreten Eigenwert zur Nukleonenzahl 1 mit der Masse M (exp. Masse des Nukleons) haben. Zu den Funktionen ϱ geben natürlich nur Zustände mit der Nukleonenzahl 0 bzw. 1 einen Beitrag. Diese Funktionen enthalten demnach Terme der Form

$$\varrho(\varkappa^2) = c_3\delta(\varkappa^2 - m^2) + \ldots; \qquad \varrho_1 = c_2\delta(\varkappa^2 - M^2) + \ldots$$

([9]) Um im Rahmen der Störungsrechnung stets konvergente Ausdrücke zu erhalten, muß man bekanntlich noch einen Term $\sim \lambda A^4$ einführen. Wir gehen darauf nicht ein, da dieser Term für die hier betrachteten Zusammenhänge ohne wesentliche Bedeutung ist.

Die Konstanten Z_3 und Z_2 werden nun dadurch festgelegt, daß man c_3 und c_2 auf Eins normiert ([10]). Dies entspricht dem Verfahren bei der störungstheoretischen Durchführung der Renormierung ([11]), bzw. den Renormierungsbedingungen von Källén ([1]).

Für die Konstanten Z_3 und Z_2 gilt nach (16), (24) und (28)

$$Z_3^{-1} = \int_0^\infty \varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2); \qquad Z_2^{-1} = \int_0^\infty \varrho_1(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,.$$

Da die Funktionen ϱ und ϱ_1 stets positiv sind und Summanden $\delta(\varkappa^2 - m^2)$ bzw. $\delta(\varkappa^2 - M^2)$ enthalten, gilt nach (29) für die Renormierungskonstanten:

$$(30) \qquad 0 \leqslant Z_3 < 1\,; \qquad\qquad 0 \leqslant Z_2 < 1 \quad ([12])\,.$$

Wir wollen jetzt Formeln für die Massenkonstanten δm und δM gewinnen. Betrachten wir zunächst die Mesonmasse:

Nach (9) und (27) ist

$$(31) \qquad (\Box - m_0^2)\langle[A(x),\, A(x')]\rangle_0 = \frac{ig}{2} Z_1 Z_3^{-1}\langle[[\overline{\psi}(x),\, \gamma_5\psi(x)],\, A(x')]\rangle_0 = \\ = i\int_0^\infty (\varkappa^2 - m_0^2)\Delta(x - x'\,;\, \varkappa^2)\,\varrho(\varkappa^2)\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,.$$

Wir differenzieren nach t' und setzen dann $t' = t$. Es ist

$$\langle[[\overline{\psi}(x),\, \gamma_5\psi(x)],\, \dot{A}(x')]\rangle_0 = 0 \qquad\qquad \text{für} \quad t' = t\,,$$

da für gleiche Zeiten

$$[\psi(x),\, \dot{A}(x')] = [\overline{\psi}(x),\, \dot{A}(x')] = 0\,.$$

Man erhält also

$$m_0^2\int_0^\infty \varrho\,\mathrm{d}(\varkappa^2) = \int_0^\infty \varkappa^2\varrho\,\mathrm{d}(\varkappa^2)\,,$$

([10]) Sollten die Funktionen ϱ noch weitere δ-Funktionen enthalten, so entsprechen diese ebenfalls stabilen Teilchen mit der Nukleonenzahl 0 bzw. 1. Von einer physikalisch brauchbaren Theorie der Wechselwirkung von π-Mesonen und Nukleonen sollten derartige Teilchen nicht geliefert werden, da sie experimentell nicht auftreten. Falls sie aus der Theorie folgen, so muß man (zur Festlegung von Z_2 und Z_3) genauer denjenigen diskreten Eigenwert charakterisieren, der zum experimentellen Meson bzw. Nukleon gehört.

([11]) Vgl. z.B. P. T. MATTHEWS: *Phil. Mag.*, **41**, 185 (1950).

([12]) Diese Ungleichungen sind offenbar bisher nicht angegeben worden. Im Fall der Elektrodynamik gibt Z_3 gleichzeitig den Zusammenhang zwischen der nackten und der renormierten Ladung an. Die Ungleichung für Z_3 drückt dann den zuerst von Schwinger (vgl. W. PAULI: *Feldquantisierung* (Vorlesungen 1950-51)) bewiesenen Sachverhalt aus, daß die renormierte Ladung kleiner ist als die nackte Ladung.

oder

$$\delta m^2 = -\frac{\int\limits_0^\infty (\varkappa^2 - m^2)\varrho\, d(\varkappa^2)}{\int\limits_0^\infty \varrho\, d(\varkappa^2)} = -Z_3\int\limits_0^\infty (\varkappa^2 - m^2)\varrho\, d(\varkappa^2) \leqslant 0\,. \tag{32}$$

Eine Formel für die Nukleonkonstante δM gewinnt man auf analoge Weise.

$$\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x} + M_0\right) S'(x-x') = \tag{33}$$

$$= \int\limits_0^\infty \left[(M_0-\varkappa)\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \varkappa(\varkappa - M_0)\right] \Delta(x-x';\, \varkappa^2)\varrho_1(\varkappa^2)\, d(\varkappa^2) +$$

$$+ \int\limits_0^\infty \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x} + M_0\right)\Delta(x-x';\, \varkappa^2)\varrho_2(\varkappa^2)\, d(\varkappa^2) =$$

$$= gZ_1Z_2^{-1}\gamma_5 \left\langle\{A(x)\psi x),\, \overline{\psi}(x')\}\right\rangle_0\,,$$

für $t' = t$ ist

$$\left\langle\{A(x)\psi(x),\, \overline{\psi}(x')\}\right\rangle_0 \sim \left\langle A(x)\right\rangle_0 = 0\,.$$

(Das Verschwinden von $\langle A(x)\rangle_0$ folgt dabei aus:

$$(\Box - m_0^2)\langle A(x)\rangle_0 = -m_0^2\langle A(x)\rangle_0 = \frac{ig}{2} Z_1Z_3^{-1} Sp\,\{\gamma_5 S^{(1)\prime}(0)\} = 0\,.$$

Nach (32) ist $m_0^2 \neq 0$; also $\langle A(x)\rangle_0 = 0$).

Demnach gilt

$$M_0\int\limits_0^\infty \varrho_1\, d(\varkappa^2) = \int\limits_0^\infty (\varkappa\varrho_1 - \varrho_2)\, d(\varkappa^2)$$

oder

$$\delta M = \frac{\int\limits_0^\infty [(M-\varkappa)\varrho_1 + \varrho_2]\, d(\varkappa^2)}{\int\limits_0^\infty \varrho_1\, d(\varkappa^2)} = Z_2\int\limits_0^\infty [(M-\varkappa)\varrho_1 + \varrho_2]\, d(\varkappa^2)\,. \tag{34}$$

Die Formeln (29), (32) und (34) drücken die Konstanten Z_2, Z_3, δm^2, δM durch die Funktionen $\varrho(\varkappa^2)$ aus. Auf die Konstante Z_1 wollen wir in dieser Arbeit nicht eingehen.

Es dürfte klar sein, daß die abgeleiteten Zusammenhänge nicht auf das spezielle Beispiel der Kopplung pseudoskalarer Mesonen mit Nukleonen beschränkt sind, sondern sich leicht auf andere Fälle übertragen lassen. Für eine Anwendung auf die Quantenelektrodynamik sind naturgemäß — wegen der Lorentzbedingung — einige zusätzliche Überlegungen erforderlich.

Die in diesem Abschnitt erhaltenen Resultate berühren sich eng mit der von Källén durchgeführten Definition der Renormierungskonstanten für die Quantenelektrodynamik.

Methodisch unterscheiden sich die beiden Darstellungen darin, daß hier die Benutzung einlaufender Felder und die damit verknüpfte Problematik des adiabatischen Einschaltens vermieden wird; zum andern legen wir Wert auf den Zusammenhang zwischen den Renormierungskonstanten und den Eigenschaften der Ausbreitungsfunktionen.

3. – Bestimmung der Vakuumfunktionen in g^2 Näherung.

Obwohl es unser eigentliches Anliegen ist, Aussagen über die Ausbreitungsfunktionen zu gewinnen, die unabhängig von der Störungsrechnung sind, wollen wir darauf hinweisen, daß die hier benutzten Methoden auch für die störungsmäßige Berechnung dieser Funktionen von Vorteil sind. Wir illustrieren diese Methoden indem wir die Funktionen ϱ_1, ϱ_2 und S'_F in der g^2-Näherung für das vorhin betrachtete Beispiel der pseudoskalaren Kopplung von Mesonen und Nukleonen bestimmen. Im Gegensatz zu anderen Darstellungen treten dabei in diesem Schema keine divergenten Bestandteile auf, deren Elimination bei der sonst üblichen Methode zu relativ umständlichen Umformungen Anlaß gibt ([13]).

Wir setzen also

$$\varrho_1(\varkappa^2) = \varrho_{10}(\varkappa^2) + g^2\varrho_{11}(\varkappa^2) + \dots$$
$$\varrho_2(\varkappa^2) = \varrho_{20}(\varkappa^2) + g^2\varrho_{21}(\varkappa^2) + \dots$$

und bestimmen diese Größen, indem wir z.B. die $S^{(+)'}(x)$-Funktion nach Potenzen von g^2-entwickeln.

$$S^{(+)'}(x-x') = i\,\langle\psi(x)\overline{\psi}(x')\rangle_0 = S^{(+)}(x-x';\,M) + 0(g^2)\,. \tag{35}$$

In nullter Näherung tritt natürlich die ungestrichene $S^{(+)}$-Funktion auf und demnach ist:

$$\varrho_{10} = \delta(\varkappa^2 - M^2)\;;\qquad \varrho_{20} = 0\;;\qquad \delta M_0 = 0\;;\qquad Z_{20} = 1\,.$$

([13]) W. Zimmermann (*Nuovo Cimento*, im Erscheinen) hat ein allgemeines Verfahren entwickelt, um die Ausbreitungsfunktionen in beliebiger Ordnung zu berechnen, ohne daß dabei divergente Terme auftreten.

Um den g^2-Term der Gleichung (35) zu finden, bilden wir

$$(36)\qquad \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + M\right)\left(\gamma^T \frac{\partial}{\partial x'} - M\right) S^{(+)\prime}(x - x') = i \langle f(x)\bar{f}(x') \rangle_0 =$$

$$= ig^2\gamma_5 \langle A(x)\psi(x)A(x')\bar{\psi}(x')\rangle_0 + \ldots = ig^2 \Delta^{(+)}(x - x'; m)\gamma_5 S^{(+)}(x - x'; M)\gamma_5 + \ldots .$$

In (36) ist $f(x) = -igZ_1Z_2^{-1}\gamma_5 A(x)\psi(x) + \delta M\psi(x)$.
Bei der weiteren Umformung sind nur Terme $\sim g^2$ ausgeschrieben worden.
Durch Übergang zum Fourierraum ergibt sich ($\varkappa^2 = -k^2$)

$$(37)\qquad \theta(k_0)(i\gamma k + M)\left[(i\gamma k - \varkappa)\varrho_{11} + \varrho_{21}\right](i\gamma k + M) =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \theta(k_0 - q_0)\theta(q_0)\gamma_5(i\gamma q - M)\gamma_5\,\delta[q^2 + M^2]\,\delta\left[(k - q)^2 + m^2\right] d^4q .$$

Zur Elimination der γ-Matrizen wird einmal die Spur von (37), zum andern die Spur der mit $i\gamma k$ multiplizierten Gleichung gebildet. Man erhält

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta(k_0)\left[-\varkappa(\varkappa - M)^2\varrho_{11} + (\varkappa^2 + M^2)\varrho_{21}\right] = \\ &\qquad = \frac{M}{(2\pi)^3}\int \theta(k_0 - q_0)\theta(q_0)\,\delta[q^2 + M^2]\,\delta\left[(k - q)^2 + m^2\right] d^4q \\ &\theta(k_0)\varkappa^2\left[(\varkappa - M)^2\varrho_{11} + 2M\varrho_{21}\right] = \\ &\qquad = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \theta(k_0 - q_0)\theta(q_0)(kq)\,\delta[q^2 + M^2]\,\delta\left[(k - q)^2 + m^2\right] d^4q. \end{aligned}\right.$$

Die hier auftretenden Integrale sind elementar ausführbar und konvergent. Man findet für ϱ_{11} und ϱ_{21}:

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho_{11} &= \frac{1}{32\pi^2}\,\theta\left[\varkappa^2 - (M + m)^2\right]\cdot \\ &\qquad \cdot \frac{\sqrt{(\varkappa^2 - M^2 - m^2)^2 - 4m^2M^2}}{\varkappa^4}\left\{1 - \frac{m^2(\varkappa^2 + M^2)}{(\varkappa^2 - M^2)^2}\right\} \\ \varrho_{21} &= \frac{1}{32\pi^2}\,\theta\left[\varkappa^2 - (M + m)^2\right]\cdot \\ &\qquad \cdot \frac{\sqrt{(\varkappa^2 - M^2 - m^2)^2 - 4m^2M^2}}{\varkappa^3}\left\{1 - \frac{m^2}{(\varkappa + M)^2}\right\} . \end{aligned}\right.$$

Für $S_F' = S_F + g^2 S_{F1}' + \ldots$ gilt demnach

$$S_{F1}'(k) = -2i\int_0^\infty \frac{\left[(i\gamma k - \varkappa)\varrho_{11} + \varrho_{21}\right] d(\varkappa^2)}{k^2 + \varkappa^2 - i\varepsilon} .$$

Zur expliziten Angabe von $S'_{F1}(k)$ ist also noch ein konvergentes Integral über $\varkappa^2$ auszuführen. Die Integration läßt sich elementar durchführen und ist im Spezialfall $m = 0$ trivial. Wir geben für diesen Fall das Resultat an ([14]):

$$S'_{F1}(k) = \frac{i}{16\pi^2} \frac{i\gamma k}{k^2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{M^2}{k^2}\right) \ln \left(1 + \frac{k^2}{M^2} - i\varepsilon\right)\right\}. \tag{40}$$

Daß während der Rechnung keine divergenten Glieder auftraten, ist in der vorgenommenen Aufspaltung der S'_F-Funktion begründet. Man kann die hier nicht in Erscheinung getretenen Renormierungskonstanten natürlich aus ϱ_{11} und ϱ_{21} mit Hilfe der Formeln (29) und (34) bestimmen.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. W. HEISENBERG für viele Anregungen und den Herren K. SYMANZIK und W. ZIMMERMANN für zahlreiche Diskussionen danken.

([14]) Dies stimmt mit dem Resultat überein, das man bei Benutzung der üblichen Methode von Dyson erhält. Vgl. R. KARPLUS *et al.*: *Phys. Rev.*, **90**, 1073 (1953).

RIASSUNTO (*)

Il presente lavoro espone un tentativo di dedurre alcune proprietà generali delle funzioni di propagazione per campi accoppiati (Δ'_F, S'_F) senza l'impiego di sviluppi in serie di potenze e di dimostrare la loro connessione con le costanti di rinormalizzazione degli operatori di campo e delle masse. Assumendo come esistenti le funzioni accoppiate, diventa possibile discuterne il comportamento in prossimità del cono di luce (o per momenti elevati) e ottenere informazioni sulle singolarità di queste funzioni analiticamente estrapolate. Basandosi su questi risultati si fa la critica dei tentativi fatti per trattare le teorie non rinormalizzabili. Si danno formule per le suddette costanti di rinormalizzazione che comprendono disequazioni per le costanti Z_2 e Z_3. Finalmente si osserva che i metodi esposti sono utili anche per calcoli di sviluppo in serie di potenze. Come esempio si espone il calcolo della correzione del minimo ordine della funzione S nella teoria mesonica pseudoscalare, senza che nello sviluppo del calcolo compaiano termini infiniti.

(*) *Traduzione a cura della Redazione.*