Unitäre S-Matrix im Lee-Modell mit „Dipolgeist“ und ein äquivalentes Modell

M. Karowski
Institut für Theoretische Physik Freie Universität Berlin, D-1000 Berlin, Arnimallee 3, Germany

31. Dezember 1968

Zusammenfassung

The $N-2\theta$-sector of the Lee-model is solved in the special case of the "dipol-ghost", and a unitary S-matrix is constructed. A general instruction is presented to construct the physical subspace of the whole state space with indefinite metric. This method is always applicable, if there are couples of "good" and "bad" ghosts. Another model with positive definite state space is described, which has the same S-matrix as the Lee-model with "dipol-ghost" in the $N-\theta$- and $N-2\theta$-sector.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In den vergangenen Jahren sind mehrere Arbeiten [1, 2, 3, 4, 5, 6] erschienen, die mit Hilfe von Dispersionsmethoden exakte Lösungen des Lee Modells im $N-2\theta$-Sektor angeben. Diese Methoden werden in Abschnitt 2 angewendet auf den Fall, daß ein sogenannter „Dipolgeist“ [7] vorhanden ist.

Bekanntlich treten wegen der indefiniten Metrik, die mit den Geisterzuständen verbunden ist, Schwierigkeiten bei der physikalischen Interpretation auf. Die Unitarität der formalen S-Operators läßt sich nicht wie üblich als „Erhaltung der Wahrscheinlichkeit“ deuten.

Heisenberg [7] hat gezeigt, daß man im Dipolfall diese Schwierigkeiten beseitigen kann. Das wird anhand der exakten Lösungen ausgeführt.

Es gibt eine allgemeine Vermutung [8], daß eine lokale Quantenfeldtheorie, die in einem Zustandsraum mit indefiniter Metrik formuliert wird, in gewisser Weide einer nichtlokalen Theorie in einem normalen Hilbert.Raum äquivalent ist. In Abschnitt 3 wird dementsprechend ein nichtlokales Modell mit positiver Metrik angegeben, das im $N-\theta$- und $N-2\theta$-Sektor dieselbe S-matrix impliziert wie das Lee-Modell mit „Dipolgeist“. Es handelt sich um ein modell mit separablem Potential, das jedoch nicht konstruierbar ist, wenn bei dem zugehörigen Lee-Modell der Grenzfall der Punktquelle vorliegt.

2 Lee-Modell mit „Dipolgeist“

Der Hamilton-Operator des Lee-Modells im Impulsraum ist

$$H = H_0 + H' \tag{1}$$

mit dem freien Teil

$$H_0 = \int_\mu^\infty d\omega\, \omega a^+(\omega) a(\omega) \tag{2}$$

und dem Wechelwirkungsteil

$$H' = \int_\mu^\infty d\omega\, u(\omega) \left[V^+ N a(\omega) + hc\right] + Z\delta m\, V^+ V. \tag{3}$$

N, V und $a(\omega)$ sind die Vernichtungsoperatoren der Teilchen N, V und θ. Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit werden die Massen der beiden schweren Teilchen N und V gleichgesetzt. Da das Modell nichtrelativistisch ist, läßt sich der Energienullpunkt so wählen, daß diese Massen gleich Null ist. Die Impulsunabhängigkeit der Operatoren N und V bedeutet, daß die zugehörigen Teilchen am Koordinatenursprung fixiert sind. Das leichte θ-Teilchen hat die Masse μ. Es ist „relativistisch”:

$$\omega = \left(\mu^2 + k^2\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Es werden nur S-Zustände betrachtet; die anderen haben keine Wechelwirkung. Die Renormierungsgrößen sind gegeben durch:

$$Z\delta m = \int_\mu^\infty d\omega \frac{u^2(\omega)}{\omega} \tag{5}$$

$$Z = \int_\mu^\infty d\omega \frac{u^2(\omega)}{\omega^2}. \tag{6}$$

Die Abschneidefunktion $u(\omega)$ lautem im Grenzfall der „Punktquelle”:

$$u(\omega) = g\,(k/\pi)^{1/2}. \tag{7}$$

Jedoch ist die Wechselwirkung auch in diesem Grenzfall nicht lokal.

Die nichtverschwindenden Vertauschungsrelationen sind:

$$\begin{aligned}\left[V, V^{+}\right] &= 1/Z, \\ \left[N, N^{+}\right] &= 1, \\ \left[a(\omega), a^{+}(\omega')\right] &= \delta(\omega - \omega').\end{aligned} \tag{8}$$

Da $Z < 0$ hat der Zustandsraum also eine indefinite Metrik. Im folgenden werden die Sektoren $N - \theta$ und $N - 2\theta$ betrachtet.

2.1 Der $N - \theta$-Sektor

Ein vollständiges System von Zuständen im $N - \theta$-Sektor ist:

$$|\, D' \,\rangle = -\int d\omega \frac{u(\omega)}{\omega^2} |\, N, \omega \,\rangle, \tag{9}$$

$$|\, V \,\rangle = \sqrt{Z} |\, V_0 \,\rangle - \int d\omega \frac{u(\omega)}{\omega} |\, N, \omega \,\rangle \tag{10}$$

und die Streuzustände

$$|\, N, \omega \,\rangle^{+} = |\, N, \omega \,\rangle - \frac{u(\omega)}{h(\omega)} \left(\sqrt{Z} |\, V_0 \,\rangle - \int d\omega' \frac{u(\omega')}{\omega' - \omega} |\, N, \omega' \,\rangle \right). \tag{11}$$

Dabei sind

$$|\, V_0 \,\rangle = \sqrt{Z} V^{+} |\, 0 \,\rangle, \tag{12}$$

$$|\, N, \omega \,\rangle = N^{+} a^{+}(\omega)^{+} |\, 0 \,\rangle, \tag{13}$$

$$h(\omega) = \omega^2 \int_{\mu}^{\infty} d\omega \frac{u^2(\omega')}{\omega'^2 \, (\omega' - \omega)}. \tag{14}$$

Da die Funktion $h(\omega)$ bei $\omega = 0$ eine doppelte Nullstelle hat, verschwindet die Norm von $|\, V \,\rangle$:

$$\langle\, V \,|\, V \,\rangle = 0. \tag{15}$$

Es empfiehlt sich, $|\, D' \,\rangle$ zu ersetzen durch die Linearkombination:

$$|\, D \,\rangle = \alpha |\, V \,\rangle + \beta |\, D' \,\rangle; \tag{16}$$

α und β können so gewählt werden, daß

$$\langle\, D \,|\, D \,\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle\, D \,|\, V \,\rangle = 1. \tag{17}$$

Dann läßt sich die Vollständigkeitsrelation im $N - \theta$-Sektor folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{1}_{N\theta} = |\, V \,\rangle\langle\, D \,| + |\, D \,\rangle\langle\, V \,| + \int d\omega \,|\, N, \omega \,\rangle^{+} \; {}^{+}\langle\, N, \omega \,|\,. \tag{18}$$

$|\,V\,\rangle$ und $|\,N,\omega\,\rangle^+$ sind Eigenzustände des Hamilton-Operators

$$H|\,V\,\rangle = 0 \qquad (19)$$
$$H|\,N,\omega\,\rangle^+ = \omega|\,N,\omega\,\rangle^+$$

$|\,D\,\rangle$ wird „Dipolgeistzustand“ genannt. Er ist kein Eigenzustand des Hamilton-Operators, sondern es gilt:

$$H|\,D\,\rangle = \beta|\,V\,\rangle\,. \qquad (20)$$

Physikalisch interpretierbar sind nur die Steuzustände $|\,N,\omega\,\rangle^+$. Beliebige Anteile von $|\,V\,\rangle$ haben keinen Einfluß wegen

$$\langle\,V\,|\,V\,\rangle = \langle\,V|\,N,\omega\,\rangle^+ = 0. \qquad (21)$$

Ein physikalisches V-Teilchen gibt es in diesem Modell nicht. $|\,V\,\rangle$ wird auch als „guter“ und $|\,D\,\rangle$ als „schlechter“ Geist bezeichnet [8].

Die S-Matrix im $N-\theta$-Sektor ist gegeben durch

$$^-\langle\,N,\omega'\,|\,N,\omega\,\rangle^+ = {}_{\omega'}S_\omega = \delta(\omega-\omega') + 2\pi i\delta(\omega-\omega')\,{}_{\omega'}T_\omega \qquad (22)$$
$${}_{\omega'}T_\omega = -u^2(\omega)/h(\omega)\,. \qquad (23)$$

Die Streuzustände sind durch Lösung der Schrödinger-Gleichung bestimmt worden. Sie erfüllen die üblichen asymptotische Bedingung:

$$\lim_{t\to-\infty}\langle\,\varphi(t)\,|\,\eta\,|\,\varphi(t)\,\rangle = 0 \qquad (24)$$

mit

$$|\,\varphi(t)\,\rangle = \int d\omega\left(e^{i(H-\omega)t}|\,N,\omega\,\rangle - |\,N,\omega\,\rangle^+\right)\,{}^\omega\varphi \qquad (25)$$

und

$$\langle\,\varphi\,|\,\eta\,|\,\varphi\,\rangle = \langle\,\varphi\,|\,\varphi\,\rangle + 2|\langle\,V_0\,|\,\varphi\,\rangle|^2. \qquad (26)$$

Das durch (26) definierte Skalarprodukt ist positiv definit und induziert damit eine Topologie. Wegen

$$\lim_{t\to-\infty}\int d\omega e^{i\omega t}f(\omega)\left(P/\omega + i\pi\delta(\omega)\right)t^n = 0 \qquad (27)$$

für $f\in S$ verschwindet zunächst

$$\langle\,\varphi(t)\,|\,\varphi(t)\,\rangle = 2 - 2\,\mathrm{Re}\int d\omega'\int d\omega\,{}^{\omega'}\varphi^*\langle\,N,\omega'\,|\,e^{i(H-\omega')t}\,|\,N,\omega\,\rangle^{+\,\omega}\varphi, \qquad (28)$$

$$\langle\,N,\omega'\,|\,e^{i(H-\omega')t}\,|\,N,\omega\,\rangle^+ = \delta(\omega-\omega') - \frac{u(\omega')u(\omega)}{h(\omega)}\frac{1}{\omega'-\omega-i0}. \qquad (29)$$

Da H keine komplexen Eigenwerte hat verschwindet auch

$$\langle\,V_0\,|\,\varphi(t)\,\rangle = \int d\omega\,\langle\,V_0\,|\left\{\Big[\,|D\rangle\langle V|\,+|V\rangle\langle D|\,+i\beta t|V\rangle\langle V| \right. \qquad (30)$$
$$\left. + \int d\omega' e^{i\omega' t}|\,N,\omega'\,\rangle^{+\,+}\langle\,N,\omega'\,|\Big]e^{-i\omega t}|\,N,\omega\,\rangle - |\,N,\omega\,\rangle^+\right\}{}^\omega\varphi\,.$$

Der dritte Term ergibt sich aus (20).

2.2 Der $N-2\theta$-Sektor

Die ungewöhnliche Form der Vollständigkeitsrelation im $N-\theta$-Sektor (18) hat zur Folge. daß im $N-2\theta$-Sektor die Unitarität des formalen S-Operators

$$S^\dagger S = 1 \tag{31}$$

sich nicht als „Erhaltung der Wahrscheinlichkeit“ deuten läßt. Denn (31) lautet in Matrixelementen geschrieben

$$\begin{aligned}
&\int d\omega\ \big({}^+\langle\, \phi \,|\, V,\omega\,\rangle^- \, {}^-\langle\, D,\omega \,|\, \psi\,\rangle^+ + {}^+\langle\, \phi \,|\, D,\omega\,\rangle^- \, {}^-\langle\, V,\omega \,|\, \psi\,\rangle^+ \big) \\
&+ \tfrac{1}{2} \int d\omega \int d\omega' \, {}^+\langle\, \phi \,|\, N,\omega,\omega'\,\rangle^- \, {}^-\langle\, N,\omega,\omega' \,|\, \psi\,\rangle^+ \\
&= {}^+\langle\, \phi \,|\, \psi\,\rangle^+ \, .
\end{aligned} \tag{32}$$

Die beiden ersten störenden Terme, die von den Geistern herrühren, lassen sich aber beseitigen, indem man die „physikalischen Steuzustände $|\,\psi\,\rangle^+_{\text{ph}}$“ im $N-2\theta$-Sektor als Überlagerung von $|\,N,\omega,\omega'\,\rangle^+$ und $|\,V,\omega+\omega'\,\rangle^+$ darstellt:

$$|\,N,\omega,\omega'\,\rangle^+_{\text{ph}} = |\,N,\omega,\omega'\,\rangle^+ + \rho(\omega,\omega')|\,V,\omega+\omega'\,\rangle^+ \tag{33}$$

und durch folgende Bedingung einschränkt:

$${}^-\langle\, V,\omega \,|\, \psi\,\rangle^+_{\text{ph}} = 0\, . \tag{34}$$

Das bedeutet, daß der physikalische Streuzustand $|\,\psi\,\rangle^+_{\text{ph}}$ keinen Dipolgeist mit einer auslaufenden θ-Kugelwelle enthält. Aus (32) folgt nun die übliche Unitaritätsrelation:

$$\tfrac{1}{2} \int d\omega \int d\omega' \, \big|\, {}^-_{\text{ph}}\langle\, N,\omega,\omega' \,|\, \psi\,\rangle^+_{\text{ph}} \big|^2 = 1\, . \tag{35}$$

In einem Raum mit positiver definiter Metrik ist (35) hinreichend dafür, daß

$$\mathcal{H}^+_{\text{ph}} = \mathcal{H}^-_{\text{ph}}\, . \tag{36}$$

$\mathcal{H}^\pm_{\text{ph}}$ seien die Teilräume, die durch die physikalischen Zustände $|\,N,\omega,\omega'\,\rangle^\pm_{\text{ph}}$ aufgespannt werden. Hier ist diese Folgerung nicht richtig. Wegen der speziellen Form des metrischen Tensors (17) und (21) kann (36) aber trotzdem bewiesen werden: Sei $\mathcal{H}^+$ der Teilraum, der durch die formalen Zustände $|\,V,\omega\,\rangle^+$ und $|\,N,\omega,\omega'\,\rangle^+$, $\mathcal{H}^+_V$ der Teilraum, der durch $|\,V,\omega\,\rangle^+$ aufgespannt wird. Dann ist der orthogonale Raum zu $\mathcal{H}^+_V$ wegen (17) und (21)

$$\mathcal{H}^{+\,\perp}_V = \mathcal{H}^+\, . \tag{37}$$

Es ergibt sich daher das (33) und (34) die Darstellung

$$\mathcal{H}^+_{\text{ph}} = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}^{-\,\perp}_V = \mathcal{H}^+ \cap \mathcal{H}^-. \tag{38}$$

Entsprechend

$$\mathcal{H}^{-}_{\text{ph}} = \mathcal{H}^{-} \cap \mathcal{H}^{+} = \mathcal{H}^{+}_{\text{ph}} \,. \tag{39}$$

Diese Konstruktion der physikalischen Raumes läßt sich ganz allgemein immer dann durchführen, wenn die Geister paarweise als gute und schlechte Geister auftreten und (17) und (21) erfüllen. Im allgemeinen wird die Metrik in diesem Teilraum noch nicht positiv definit sein. Man muß dann den Faktorraum nach dem Radikal bilden:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{ph}} \,/ \mathcal{H}^{\perp}_{\text{ph}} \cap \mathcal{H}_{\text{ph}} \,. \tag{40}$$

Dieser ist dann ein normaler Hilbertraum.

Im folgenden werden diese Betrachtungen expliplizite ausgeführt. Dazu werden zunächst die formalen Zustände $|\, V, \omega \,\rangle^{+}$ und $|\, N, \omega, \omega' \,\rangle^{+}$ bestimmt.

Ein Zustand im $N - 2\theta$-Sektor läßt sich darstellen durch

$$|\, \psi \,\rangle = \int d\omega \sqrt{Z} |\, V_0, \omega \,\rangle \; {}^{V_0 \omega}\psi + \int d\omega \int d\omega' |\, N, \omega, \omega' \,\rangle \; {}^{\omega\omega'}\psi \tag{41}$$

mit

$$\begin{aligned} |\, V_0, \omega \,\rangle &= \sqrt{Z} V^{\dagger} a^{\dagger}(\omega) |\, 0 \,\rangle \\ |\, N, \omega, \omega' \,\rangle &= N^{\dagger} a^{\dagger}(\omega) a^{\dagger}(\omega') |\, 0 \,\rangle \,. \end{aligned} \tag{42}$$

Aus der Schrödinger-Gleichung

$$(H - E) \,|\, E \,\rangle = 0 \tag{43}$$

ergibt sich ein gekoppeltes System von Gleichungen:

$$Z \,(\delta m + \omega - E) \; {}^{V_0 \omega}\psi + 2 \int d\omega' \, u(\omega') \, {}^{\omega\omega'}\psi_E = 0 \tag{44}$$

$$2 \,(\omega + \omega' - E) \; {}^{\omega\omega'}\psi_E + u(\omega) \, {}^{V_0 \omega'}\psi + u(\omega') \, {}^{V_0 \omega}\psi_E = 0 \,. \tag{45}$$

Durch Einsetzen von (45) in (44) erhält man die singuläre Integralgleichung [7, 9]:

$$h(E - \omega) \, {}^{V_0 \omega}\psi_E + \int d\omega' \frac{u(\omega) u(\omega')}{\omega + \omega' - E} \, {}^{V_0 \omega'}\psi_E - \int d\omega' u(\omega') \, {}^{\omega\omega'}\mathbf{1}_E = 0 \,. \tag{46}$$

Dabei verschwindet ${}^{\omega\omega'}\mathbf{1}_E$ für $|\, V_0, \omega \,\rangle^{+}$ und für $|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{+}$ gilt:

$${}^{\omega'_0 \omega'_1}\mathbf{1}_{\omega_0 \omega_1} = \delta(\omega'_0 - \omega_0)\delta(\omega'_1 - \omega_1) + \delta(\omega'_0 - \omega_1)\delta(\omega'_1 - \omega_0) \,. \tag{47}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $|\, V_0, \omega \,\rangle^{+}$ $(E = \omega)$ und machen den Ansatz

$${}^{V_0 \omega'}\psi_\omega = \, {}^{V_0}\psi_V \, {}^{\omega'}\psi_\omega \; + \; {}^{V_0}\psi_\omega \, {}^{\omega'}\psi_V + \, {}^{V_0}\psi_V \, {}^{V_0}\psi_\omega \, 2u(\omega') \, {}^{\omega'}\chi_E \,. \tag{48}$$

Die Größen ${}^{V_0}\psi_V$ usw. gehören zu den Lösungen im $N - \theta$-Sektor. Die Integralgleichung für ${}^{\omega}\chi_E$ lautet dann:

$$h(E - \omega) \; {}^{\omega}\chi_E + \int d\omega' \frac{u(\omega) u(\omega')}{\omega + \omega' - E} \, {}^{\omega'}\chi_E + Z = 0 \,. \tag{49}$$

Für beliebige komplexe Werte von E, die nicht auf der reellen Achse von μ bis ∞ liegen, ist diese Gleichung eindeutig lösbar oder die zugehörige homogene Gleichung besitzt eine nichttriviale Lösung, die einem gebundenen Zustand entspricht.

Der Beweis wird im Anhang gebracht. Die Lösung ist:

$$^{\omega}\chi_E = B(\omega, E)/U(E) \tag{50}$$

mit

$$U(E) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{h(\omega)h(E-\omega)} \tag{51}$$

$$B(\omega, E) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega'}{h(\omega')h(E-\omega')}\frac{1}{\omega+\omega'-E}\,. \tag{52}$$

Der Integrationsweg $\mathcal{C}$ umfaßt die positive reelle Achse im Uhrzeigersinn. Um auslaufende Kugelwellen zu erhalten, ist wie üblich E als $E+i0$ zu verstehen. Die Nullstellen von $U(E)$ sind Eigenwerte des Hamilton-Operators und gehören zu den gebundenen Zuständen im $N-2\theta$-Sektor. Wegen der indefiniten Metrik sind sie nicht notwendig reell.

Für $|\,N,\omega_0,\omega_1\,\rangle^+$ und $E=\omega_0+\omega_1$ führen die entsprechenden Betrachtungen auf die selbe Gleichung (49). Also ist

$$^{V_0\omega}\psi_{\omega_0\omega_1} = {}^{V_0}\psi_{\omega_0}\,{}^{\omega}\psi_{\omega_1} + {}^{V_0}\psi_{\omega_1}\,{}^{\omega}\psi_{\omega_0} + {}^{V_0}\psi_{\omega_0}\,{}^{V_0}\psi_{\omega_1}\,2u(\omega')\,{}^{\omega}\chi_E\,. \tag{53}$$

Die Matrixelemente $^-\langle\,E'\,|\,E\,\rangle^+$ kann man recht mühsam direkt berechnen; dasselbe Ergebnis erhält man mit Hilfe der Formel:

$$^-\langle\,E'\,|\,E\,\rangle^+ = {}^+\langle\,E'\,|\,E\,\rangle^+ - 2\pi i\delta(E'-E)\,\langle\,E'\,|\,(H-E')\,|\,E\,\rangle^+\,. \tag{54}$$

Für den Fall $\langle\,E'\,| = \langle\,V,\omega'\,|$ ist

$$\langle\,V,\omega'\,|\,(H-E') = \langle\,V\,|\,[a(\omega'),H'] = \frac{1}{\sqrt{Z}}u(\omega')\int d\omega''\,{}^{\omega''}\psi_V^*\,\langle\,V_0,\omega''\,| \tag{55}$$

einzusetzen. Dann erhält man:

$$\langle\,V,\omega'\,|\,(H-E')\,|\,E\,\rangle^+ = -u(\omega')\int d\omega''\,\frac{u(\omega'')}{\omega''}\,{}^{V_0\omega''}\psi_E\,. \tag{56}$$

Wegen $\omega'=E$ folgt mit Hilfe von (46)

$$\langle\,V,\omega'\,|\,(H-E')\,|\,E\,\rangle^+ = h(E-\omega)\,{}^{V_0\omega'}\psi_E\,|_{\omega'=E}\,. \tag{57}$$

Für den Fall $\langle\,E'\,| = \langle\,N,\omega_0',\omega_1'\,|$ ergibt sich

$$\langle\,N,\omega_0',\omega_1'\,|\,(H-E')\,|\,E\,\rangle^+ = u(\omega_0')^{V_0\omega_1'}\psi_E + u(\omega_1')^{V_0\omega_0'}\psi_E\,. \tag{58}$$

Die Größen ${}^{+}\langle\, E' \,|\, E \,\rangle^{+}$ lassen sich durch direktes Ausrechnen bestimmen, wie zu erwarten ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
{}^{+}\langle\, V, \omega' \,|\, V, \omega \,\rangle^{+} &= 0 \\
{}^{+}\langle\, N, \omega_0', \omega_1' \,|\, V, \omega \,\rangle^{+} &= 0 \\
{}^{+}\langle\, N, \omega_0', \omega_1' \,|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{+} &= {}^{\omega_0', \omega_1'}\mathbf{1}_{\omega_0, \omega_1} \,.
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Setzt man die Lösungen (48) und (53) ein, so erhält man:

$$
{}^{-}\langle\, N, \omega_0', \omega_1' \,|\, V, \omega \,\rangle^{+} = -2\pi i \delta(E' - E) \frac{u(\omega_0')u(\omega_1')u(\omega)}{h(\omega_0')h(\omega_1')h(\omega)} \frac{2}{U(E)}, \tag{60}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{-}\langle\, N, \omega_0', \omega_1' \,|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{+} = {}& {}^{\omega_0'}S_{\omega_0}\, {}^{\omega_1'}S_{\omega_1} + {}^{\omega_0'}S_{\omega 1}\, {}^{\omega_1'}S_{\omega_0} \\
& - 2\pi i \delta(E' - E) \frac{u(\omega_0')u(\omega_1')u(\omega_0)u(\omega_1)}{h(\omega_0')h(\omega_1')h(\omega_0)h(\omega_1)} \frac{2}{U(E)} \,.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

Es soll nun gezeigt werden, wie die „physikalischen“ Zustände im $N - 2\theta$-Sektor zu definieren sind, damit die Unitarität der S-Matrix sich wie üblich als „Erhaltung der Wahrscheinlichkeit“ interpretieren läßt.

Nach (34) muß (57) für $|\, E \,\rangle^{+}_{\text{ph}}$ verschwinden. Diese Größe rührt von dem Doppelpol von ${}^{V_0 \omega'}\psi_{E,\text{ph}}$ bei $\omega' = E$ her. Dieser Doppelpol ist in dem Term ${}^{\omega'}\psi_{E',\text{ph}}$ enthalten. Aus (34) folgt daher

$$
\rho(\omega, \omega') = -\frac{u(\omega)u(\omega')h(\omega + \omega')}{h(\omega)h(\omega')u(\omega + \omega')} \,. \tag{62}
$$

Die physikalischen Streuzustände $|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{+}_{\text{ph}}$ erfüllen dann nach (59) die üblichen Orthogonalitätsrelatio

$$
{}^{+}_{\text{ph}}\langle\, N, \omega_0', \omega_1' \,|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{+}_{\text{ph}} = {}^{\omega_0', \omega_1'}\mathbf{1}_{\omega_0, \omega_1} \,. \tag{63}
$$

Für die S-Matrix erhält man:

$$
{}^{-}_{\text{ph}}\langle\, N, \omega_0', \omega_1' \,|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{+}_{\text{ph}} = {}^{\omega_0' \omega_1'}S_{\omega_0 \omega_1} = {}^{\omega_0'}S_{\omega_0}\, {}^{\omega_1'}S_{\omega_1} + {}^{\omega_0'}S_{\omega 1}\, {}^{\omega_1'}S_{\omega_0}. \tag{64}
$$

Der Term , der eine „echte Dreiteilchen Streuung“ beschreibt, fällt heraus.

Die Unitaritätsrelation (35) folgt jetzt unmittelbar aus der Unitarität der S-Matrix im $N - \theta$-Sektor. Es läßt sich weitergehend explizite zeigen, daß entsprechend (36)

$$
P_{+} = P_{-} = P \,, \tag{65}
$$

wobei P_{+} und P_{-} die Projektionsoperatoren auf die physikalischen Teilräume sind:

$$
P_{\pm} = \tfrac{1}{2} \int d\omega_0 \int d\omega_1 |\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{\pm}_{\text{ph}}\, {}^{\pm}_{\text{ph}}\langle\, N, \omega_0', \omega_1' \,| \,. \tag{66}
$$

Die Frage ist noch offen, ob es Zustände gibt, die asymptotisch für $t \to \pm\infty$ in die physikalischen Zustände $|\, \psi \,\rangle^{\pm}_{\text{ph}}$ übergehen. Entsprechend wie im $N - \theta$-Sektor kann man zeigen:

$$
s \cdot \lim_{t \to -\infty} e^{i(H - \omega_0 - \omega_1)t} \,|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle = |\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{+} \,. \tag{67}
$$

Nach Definition vertauscht P mit dem Hamilton-Operator. Daraus folgt

$$s \cdot \lim e^{i(H-\omega_0-\omega_1)t} P \,|\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle = |\, N, \omega_0, \omega_1 \,\rangle^{\pm}_{\mathrm{ph}} \,. \tag{68}$$

In dem physikalischen Teilraum gelten also die üblichen asymptotischen Relationen.

3 Ein äquivalentes Modell

Es soll jetzt gezeigt werden, daß es ein Modell mit einem normalen Zustandsraum mit positiv definiter Metrik gibt, welcher dem Lee-Modell mit „Dipolgeist“ in den Sektoren $N-\theta$ und $N-2\theta$ äquivalent ist, d.h. die Streuamplituden stimmen überein. Die besonders einfache Form der S-Matrix (64) legt es nahe, ein Modell mit separablem Potential zu betrachten.

Der Hamilton-Operator

$$H = \int d\omega\, \omega\, a^\dagger(\omega) a(\omega) - \left(\int d\omega\, v^*(\omega) N^\dagger a^\dagger(\omega) \right) \cdot hc \tag{69}$$

N und $a(\omega)$ sind die Vernichtungsoperatoren des „schweren“ Teilchens N und des „leichten“ Teilchens θ. H ermöglicht folgenden Prozeß

$$N + \theta \leftrightarrow N + \theta \,. \tag{70}$$

Aus der Schrödinger-Gleichung berechnet man den Zustand N^*:

$$|\, E \,\rangle = c \int d\omega \frac{v^*(\omega)}{\omega - E} |\, N, \omega \,\rangle \,, \tag{71}$$

E ist die Nullstelle von

$$g(E) = 1 - \int d\omega \frac{|v(\omega)|^2}{\omega - E} \,. \tag{72}$$

Diesem Zustand entspricht nichts im Lee-Modell mit „Dipolgeist“,denn $|\, V \,\rangle$ hat ja die Norm Null, ist also physikalisch nicht meßbar.

Für die Streuzustände ergibt sich:

$$|\, N, \omega \,\rangle^+ = |\, N, \omega \,\rangle + \frac{v(\omega)}{g(\omega)} \int d\omega' \, \frac{v^*(\omega)}{\omega - E} |\, N, \omega' \,\rangle \tag{73}$$

und für die Streuamplitude:

$$_{\omega'}T_\omega = |v(\omega)|^2 / g(\omega) \,. \tag{74}$$

Setzt man

$$v(\omega) = u(\omega)/\sqrt{Z\omega} \,, \tag{75}$$

so erhält man für die Funktion $g(\omega)$

$$g(\omega) = 1 - \frac{1}{|Z|} \int d\omega' \frac{1}{\omega'} \frac{u^2(\omega')}{\omega' - \omega} = \frac{1}{Z\omega} h(\omega) \,. \tag{76}$$

Daher ist

$$ {}_{\omega'}T_{\omega} = |v(\omega)|^2/g(\omega) = -\frac{u^2(\omega)}{h(\omega)} \,. \tag{77} $$

Die Streuamplitude stimmt also mit der aus 2.1 überein. Es ist bemerkenswert, daß im Grenzfall der Punktquelle

$$ u(\omega) = g\,(k/\pi)^{1/2} $$

sich dieses Modell nicht konstruieren läßt. Denn, da Z divergiert, wird (75) dann sinnlos.

Die Lösungen im $N-2\theta$-Sektor sind einfach die symmetrischen direkten Produkte der Lösungen aus dem $N-\theta$-Sektor. Das gleiche gilt für die S-Matrix. Übergänge von der Art

$$ N^* + \theta \to N + 2\theta $$

können daher nicht vorkommen. Also stimmt auch in diesem Sektor die Streuamplitude mit der aus 2.2 überein.

In den höheren Sektoren wird einfache Hamilton-Operator (69) die Äquivalenz nicht mehr gewährleisten. Es müssen dann noch Zusätze addiert werden, die eine Vielteilchenwechelwirkung beschreiben.

Anhang

Die Integralgleichung (49) läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$ h(E-\omega)\,{}^{\omega}\chi_E + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{D}} \frac{d\omega' h(\omega')}{\omega'+\omega-E}\,{}^{\omega'}\chi_E + Z = 0\,. \tag{A1} $$

Der Integrationsweg $\mathcal{D}$ umfaßt die reelle Achse von μ bis ∞ im Uhrzeigersinn.

Es soll zunächst bewiesen werden:

$$ F(\omega) = h(\omega)h(E-\omega)\left({}^{\omega}\chi_E + {}^{E-\omega}\chi_E\right) = const. \tag{A2} $$

Das Integral in (A1) – und damit $h(E-\omega)\,{}^{\omega}\chi_E$ – ist als Funktion von ω holomorph bis auf einen Verzweigungsschnitt von $E-\mu$ bis $E-\infty$. An diesem Schnitt gilt:

$$ \begin{aligned} & h(E-\omega-i0)\,{}^{\omega+i0}\chi_E - h(E-\omega+i0)\,{}^{\omega-i0}\chi_E \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{D}} d\omega' h(\omega')\,{}^{\omega'}\chi_E \left(\frac{1}{\omega'+\omega+i0-E} - \frac{1}{\omega'+\omega-i0-E}\right) \\ &= -\left(h(E-\omega-i0) - h(E-\omega+i0)\right)\,{}^{E-\omega}\chi_E\,. \end{aligned} \tag{A3} $$

$F(\omega)$ ist also an diesem Schnitt stetig. Das gleiche gilt für den Schnitt von μ bis ∞ wegen der Symmetrie unter der Substitution $\omega \to E-\omega$. $F(\omega)$ ist also in der ganzen ω-Ebene holomorph. Aus (A1) folgt wegen $h(\omega) \sim Z\omega$ für $\omega \to \infty$

$$ {}^{\omega}\chi_E \sim 1/\omega \text{ und } {}^{\omega}\chi_E + {}^{E-\omega}\chi_E = O(\omega^{-2})\,. \tag{A4} $$

Daher ist $F(\omega)$ beschränkt und nach dem Liouvilleschen Theorem (A2) bewiesen.

Zur Bestimmung der Konstanten wird folgende Integration ausgeführt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} d\omega\left({}^{\omega}\chi_E + {}^{E-\omega}\chi_E\right) = const\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{d\omega}{h(\omega)h(E-\omega)}\,. \tag{A5}$$

Da ${}^{\omega}\chi_E$ innerhalb und ${}^{E-\omega}\chi_E$ außerhalb des Integrationsweges holomorph ist, verschwindet das Integral über ${}^{\omega}\chi_E$ und bei dem über ${}^{E-\omega}\chi_E$ kann der Integrationsweg durch einen unendlichen großen Kreis ersetzt werden. Wegen (A4) folgt für $U(E) \neq 0$:

$$const = \frac{1}{U(E)}\,. \tag{A6}$$

Die gleichen Überlegungen führen für das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} d\omega' \frac{{}^{\omega'}\chi_E + {}^{E-\omega'}\chi_E}{\omega' + \omega - E} \tag{A7}$$

zur Lösung der Integralgleichung

$${}^{\omega}\chi_E = \frac{B(\omega, E)}{U(E)}\,. \tag{A8}$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß (A8) die Integralgleichung (A1) erfüllt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{d\omega'\,h(\omega')}{\omega'+\omega-E}B(\omega',E) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathcal{C}}\frac{d\omega''}{h(\omega'')h(E-\omega'')}\int_{\mathcal{D}}\frac{d\omega'}{\omega'+\omega-E}\frac{1}{\omega''+\omega-E}\,. \tag{A9}$$

Das Integral über $\mathcal{D}$ kann ersetzt werden durch die Residuen bei $E-\omega,\ E-\omega''$ und ∞:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\frac{d\omega''}{h(\omega'')h(E-\omega'')}\left(\frac{h(E-\omega)}{\omega''-\omega} + \frac{h(E-\omega'')}{\omega-\omega''} - Z\right)\,. \tag{A10}$$

Der Integrationweg $\mathcal{C}$ kann ersetzt werden durch einen Weg $\mathcal{F}$, der die Singularitäten von E bis $E-\infty$; denn der Integrand ist holomorph außerhalb von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{F}$. Der zweite Term verschwindet dann, und nach der Substitution $\omega'' \to E-\omega''$ ergibt sich:

$$-h(E-\omega)B(\omega,E) - ZU(E)\,. \tag{A11}$$

Es folgt: (A8) erfüllt (A1).

Wenn $U(E) = 0$, ist nach (A11) $B(\omega, E)$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Damit ist die Behauptung aus 2.2 bewiesen.

Literatur

[1] R.D. Amado, Phys. Rev. **122** (1961) 696.

[2] R.D. Amado u. R.P. Kennschaft, J. Math. Phys. **6** (1964) 1340.

[3] A. Pagnamenta, J. Math. Phys. **6** (1965) 955.

[4] C.M. Sommerfeld, J. Math. Phys. **6** (1965) 1170.

[5] K. Kazes, J. Math. Phys. **6** (1965) 1772.

[6] G.T. Tindel, Nuovo Cim. **45** (1966) 619.

[7] W. Heisenberg, Nucl. Phys. **4** (1957) 532.

[8] H.P. Dürr, Indefinite Metric and Nonlocal Interaction, Proc. of the Intern. Symposium on Quantum Field Theory, 69, Preprint Joint Institute for Nuclear Research, Dubna P2-3590 (1967).

[9] G. Källén, u. W.Pauli, Mat. Fys. Nedd. Dan. Vid. Selsk. **30** Nr. 7 (1955).