Freie Universität Berlin
Fachbereich Physik

WS 2006/2007

Statistische Physik - Theorie der Wärme

(PD Dr. M. Falcke)

Nachklausur

Teil 1: Fragen zum Verständnis

(18 Punkte)

1. Sei $p(x)$ die W.keitsdichte einer stochastischen Variablen x. Wie ist die charakteristische Funktion definiert? Wie berechnet man die Momente und die Kumulanten der Verteilung? 3P
2. Wie sind die Mikrozustände einer mikrokanonischen Gesamtheit verteilt? 1P
3. Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass ein Element eines kanonischen Ensembles mit diskretem (nicht entartetem) Spektrum $E_0, E_1, \dots$ sich in einem bestimmten Energiezustand E_m befindet? Wie ändert sich die W.keit bei einem entarteten Spektrum? 2P
4. Wie ist das chemische Potential definiert? Was ist seine physikalische Bedeutung in der grosskanonischen Gesamtheit? 2P
5. Beschreiben Sie den Unterschied zwischen dem idealen und dem van der Waals Gas. Welche weiteren Freiheitsgrade muss man beim idealen Gas für den Fall eines zweiatomigen Moleküles betrachten? Wie ändert sich dabei die kalorische Zustandsgleichung des Gases? 4P
6. Was ist eine adiabatische Zustandsänderung und wie wird sie für ein ideales Gas in der (p,V), in der (T,V) und in der (T,S) Ebene dargestellt? Welche Bedeutung hat der Adiabatenexponent γ? 4P
7. Wie ist die freie Enthalpie G definiert? Zeigen Sie, dass die Änderung der freien Enthalpie bei isobarer und isothermer Prozessführung der Änderung der Teilchenzahl proportional ist. 2P

Teil 2: Aufgaben

Aufgabe 1 (7P)

Betrachten Sie die Rotationsfreiheitsgrade zweiatomiger Moleküle in einem idealen Gas aus N ununterscheidbaren Teilchen. Das Energiespektrum des Systems sei:

$$E_{rot} = \frac{1}{L}\, j(j+1), \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei L proportional zum Trägheitsmoment eines Moleküls und j die Drehimpulsquantenzahl ist. $g = 2j + 1$ ist der Entartungsgrad der Drehimpulszustände.

1. Berechnen Sie die innere Energie des Systems im Grenzfall grosser und kleiner Temperaturen. **Hinweis**: Bei grossen Temperaturen kann das Spektrum der Rotationsenergie als kontinuierlich betrachtet und Summen durch Integrale approximiert werden.
2. Wie gross ist der Druck in diesem System?
3. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein beliebiges Molekül bei hohen Temperaturen im Grundzustand (bezüglich der Energie E_{rot}) befindet mit der Wahrscheinlichkeit, dass es bei niedrigen Temperaturen im Grundzustand ist.

Aufgabe 2 **10P**

Ein ideales ein-atomiges Gas aus N ununterscheidbaren Molekülen ist in einem Volumen V_1 mit der Temperatur T und dem Druck p_1 enthalten. Die Energie eines einzelen Moleküls lautet:

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \epsilon_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, M\}$$

wobei $\vec{p}$ der Impuls und ϵ_k die inneren Energieniveaus eines Teilchens sind. Die ϵ_k gehören zu einem diskreten Spektrum mit M Niveaus. Die thermische Zustandgleichung des idealen Gases gilt für dieses System.

1. Berechnen Sie die freie Energie und zeigen Sie, dass die Entropie des Systems durch

$$S_1 = Nk_B \ln \frac{eV_1}{N} - Nk_B \frac{\partial f}{\partial T}$$

gegeben ist, wobei f nur eine Funktion der Temperatur und der inneren Energieniveaus ist. Wie lautet $f(T)$?

2. Jetzt wird ein zweites System mit der gleichen Temperatur T, Teilchenanzahl N, Volumen V_2 und Druck p_2 betrachtet. Berechen Sie die Gesamtentropie der zwei nicht wechselwirkenden Systeme.
3. Die beiden Systeme werden nun miteinander in Kontakt gebracht, sodass sie Energie und Teilchen austauschen können. Berechnen Sie das Volumen, die Temperatur und den Druck des Gesamtsystems. Wie ändert sich die Gesamtentropie? Zeigen Sie, dass $\Delta S \geq 0$ ist, und dass $\Delta S = 0$ nur bei $p_1 = p_2$ gilt.

Aufgabe 3 **5P**

Ein quantenstatistisches Ensemble von Spin-1/2 Teilchen sei wie folgt prepariert: Der Zustand $|0\rangle$ komme mit Wahrscheinlichkeit $p = 1/3$, der Zustand $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ mit Wahrscheinlichkeit $p = 2/3$ vor. Hierbei sind

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Eigenzustände von σ_z mit Eigenwert $+1$ und -1.

1. Wie sieht der Dichteoperator für dieses Ensemble aus?
2. Beschreibt er einen reinen oder einen gemischten Zustand?
3. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \vec{\sigma} \rangle = (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle)$ in diesem Ensemble.

Hinweis: Die Operatoren für die Spinkomponenten sind die Pauli Spin Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gesamtpunktzahl: 40

Bearbeitungszeit: 1 1/2 Stunden.
zugelassene Hilfsmittel: keine.
Lösungswege müssen erkennbar sein!

Viel Erfolg!