

Statistische Physik - Theorie der Wärme
(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 8: Einfaches Stern-Modell, Jacobi Determinante

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Ein Stern kann näherungsweise durch eine statische Gaskugel (einkomponentiges, fluides Medium) modelliert werden, wobei der Druck gerade die gravitative Anziehung kompensiert. Zwischen Druck p und Dichte des Sterns ρ besteht erfahrungsgemäß der Zusammenhang:

$$p = K\rho^\Gamma \quad (K, \Gamma : \text{Materialkonstanten, } \Gamma > 0).$$

Berechnen Sie die Dichteverteilung $\rho(r)$ im Stern für $\Gamma = 2$ unter Verwendung der Newtonschen Potentialgleichung

$$\Delta U = 4\pi G\rho \quad (G: \text{Newtonsche Gravitationskonstante})$$

und bestimmen Sie die Beziehung zwischen Masse M und Radius R des Sterns.

Hinweis: Die Euler-Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} des fluiden Mediums

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p = -\rho\nabla U$$

liefert den Zusammenhang zwischen Druckverteilung im Stern und dessen Gravitationspotential.

Aufgabe 2

(5 Punkte)

f und g seien Funktionen von zwei Variablen u und v . Die Jacobi Determinante ist definiert als

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} := \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)_u - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_v.$$

a. Beweisen Sie die folgende Kettenregel

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

wobei $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$.

Hinweis: Hier ist es vorteilhaft, die Determinante mit Hilfe des ε -Tensors darzustellen.

b. Benutzen Sie die in Teilaufgabe (a) bewiesene Relation um folgende Identität zu zeigen

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}.$$

c. Zeigen Sie, daß

$$\frac{\partial(T, S)}{\partial(P, V)} = 1.$$

Hinweis: Sehen Sie sich die gemischten zweiten Ableitungen der freien Energie (bei konstanter Teilchenzahl) nach ihren natürlichen Variablen an.

Abgabetermin: Mittwoch, 13.12.2006 vor Beginn der Vorlesung.

Lösungen

Aufgabe 1

Wegen des statischen Charakters des Problems reduziert sich die Euler-Gleichung auf

$$\nabla p = -\rho \nabla U = 2K\rho \nabla \rho \quad (1)$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen wegen der (polytropen) Zustandsgleichung $p(r) = K\rho^2(r)$ folgt. Wegen der Kugelsymmetrie des Problems folgt für die Newtonsche Potentialgleichung

$$\Delta U = \frac{\partial^2}{\partial r^2} U + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} U = 4\pi G \rho(r) \quad (2)$$

Aus (1) und (2) läßt sich wegen

$$\frac{\partial}{\partial r} U = -2K \frac{\partial}{\partial r} \rho \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} U = -2K \frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho \quad (3)$$

folgende Gleichung für ρ ableiten

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \rho + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \rho + \alpha \rho = 0, \quad \alpha \equiv \frac{2\pi G}{K}. \quad (4)$$

Mit der Substitution $x = r\sqrt{\alpha}$ geht diese Gleichung in die (sphärische) Besselsche Gleichung (mit dem Index $n = 0$) über:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho + \frac{2}{x} \frac{\partial}{\partial x} \rho + \rho = 0,$$

deren allgemeine Lösung

$$\rho(x) = A \frac{\sin x}{x} + B \frac{\cos x}{x}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten A und B ist. Aus der natürlichen Forderung $\rho(x = r\sqrt{\alpha} = 0) < \infty$ erhält man $B \equiv 0$, also

$$\rho(r) = A \frac{\sin(\sqrt{\alpha}r)}{\sqrt{\alpha}r} \quad 0 \leq r \leq R,$$

wobei der Radius R des Sterns durch das Verschwinden des Druckes $p(R) = K\rho^2(R) \stackrel{!}{=} 0$ an der Sternoberfläche bestimmt ist. Daraus folgt $\sqrt{\alpha}R \stackrel{!}{=} \pi$, also

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{2G}}.$$

Hieraus wird ersichtlich, daß der Radius des Sterns (im Gleichgewicht) allein durch die Zustandsgleichung ($K, \Gamma = 2$) und die Gravitation festgelegt ist. Insbesondere läßt sich zeigen, daß der Radius in obigem (nichtrelativistischen) Stern-Modell für $\Gamma \leq \frac{6}{5}$ unendlich groß wird, sodaß für solche Zustandsgleichungen keine statischen Sterne mehr existieren.

Die zweite Integrationskonstante A legt die Gesamtmasse M über

$$\begin{aligned} M(R) &= 4\pi \int_0^R \rho(r\sqrt{\alpha}) r^2 dr \\ &= 4\pi A \int_0^R r^2 \frac{\sin r\sqrt{\alpha}}{r\sqrt{\alpha}} dr \\ &= \frac{4\pi A}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\sin \sqrt{\alpha}R}{\alpha} - \frac{R}{\sqrt{\alpha}} \cos \sqrt{\alpha}R \right) \\ &= 4\pi A \frac{R}{\alpha} = \frac{4}{\pi} R^3 A \end{aligned}$$

fest. Hier haben wir in den letzten beiden Zeilen $\sqrt{\alpha}R = \pi$ benutzt.

Aufgabe 2

a. Die Determinante einer $N \times N$ Matrix läßt sich mit Hilfe des N -dimensionalen ϵ -Tensors

$$\epsilon_{12\dots N} = 1, \quad \epsilon_{ij\dots k} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (i, j, \dots, k) \in P_+(1, 2, \dots, N) \text{ (gerade Permutation)} \\ -1, & \text{falls } (i, j, \dots, k) \in P_-(1, 2, \dots, N) \text{ (ungerade Permutation)} \end{cases}$$

schreiben als

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i,j,\dots,k=1}^N \epsilon_{ij\dots k} A_{1i} A_{2j} \dots A_{Nk} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{i,j,\dots,k=1}^N \sum_{l,m,\dots,p=1}^N \epsilon_{lm\dots p} \epsilon_{ij\dots k} A_{li} A_{mj} \dots A_{pk} \\ &= \frac{1}{N!} \epsilon_{lm\dots p} \epsilon_{ij\dots k} A_{li} A_{mj} \dots A_{pk} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Einsteinsche Summenkonvention benutzt haben, wonach über doppelt auftretende Indizes automatisch zu summieren ist. Insbesondere erhält man für eine zweidimensionale Determinante

$$\begin{aligned} |A| &= \epsilon_{ij} A_{1i} A_{2j} = \epsilon_{12} A_{11} A_{22} + \epsilon_{21} A_{12} A_{21} \\ &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}. \end{aligned}$$

Für die folgende Rechnung setzen wir: $(f, g) = (f_1, f_2)$, $(u, v) = (u_1, u_2)$, $(x, y) = (x_1, x_2)$. Somit erhält man für die Jacobi Determinante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} &= \epsilon_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ &= \epsilon_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \epsilon_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \epsilon_{ij} \epsilon_{lk} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \epsilon_{lk} \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \epsilon_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u_1, u_2)} \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)}. \end{aligned}$$

Beim Übergang von Zeile 3 zu Zeile 4 haben wir benutzt, daß

$$\epsilon_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_l}{\partial x_1} \frac{\partial u_k}{\partial x_2} - \frac{\partial u_l}{\partial x_2} \frac{\partial u_k}{\partial x_1}$$

aufgrund der Antisymmetrie in i und j für $k = l$ verschwindet und deshalb proportional zum ϵ -Tensor ist.

b. Unter Benutzung von (a) folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v &= \frac{\partial(f, v)}{\partial(u, v)} \\ &= \frac{\partial(f, v)}{\partial(f, u)} \frac{\partial(f, u)}{\partial(u, v)} \\ &= -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, daß sich das Vorzeichen der Jacobi Determinante beim Vertauschen zweier Spalten umkehrt sowie die Beziehung zwischen der Ableitung einer Funktion ($v(u)$) und ihrer Umkehrung ($u(v)$):

$$\frac{\partial(f, u)}{\partial(u, v)} = -\frac{\partial(f, u)}{\partial(v, u)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(f, v)}{\partial(f, u)} = \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_f = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}.$$

c. Das Differential der freien Energie (bei konstanter Teilchenzahl) lautet

$$dF = -SdT - pdV.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} -S &= \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \\ -p &= \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T &= -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \end{aligned} \tag{5}$$

Unter Benutzung von (a) erhält man somit für die gesuchte Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(T, S)}{\partial(P, V)} &= \frac{\partial(T, S)}{\partial(T, V)} \frac{\partial(T, V)}{\partial(P, V)} \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \\ &= \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V} \stackrel{(5)}{=} 1. \end{aligned}$$