Freie Universität Berlin
Fachbereich Physik

WS 2006/2007
25.10.2006

Statistische Physik - Theorie der Wärme

(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 2: Bayesche Formel, charakteristische Funktionen und statistische Unabhängigkeit

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Gegeben seien 5 Urnen folgenden Inhalts:

2 Urnen vom Inhalt A_1 mit je 2 weißen und 3 schwarzen Kugeln,
2 Urnen von Inhalt A_2 mit je einer weißen Kugel und 4 schwarzen Kugeln,
1 Urne mit dem Inhalt A_3 mit 4 weißen Kugeln und einer schwarzen Kugel.

Aus einer willkürlich ausgewählten Urne werde eine Kugel herausgenommen. Sie sei weiß. Wie gross ist die W.keit dafür, dass die herausgegriffene Kugel aus der Urne vom Inhalt A_3 stammt?

Aufgabe 2 (2 Punkte)

In der Vorlesung wurden neben der charakteristischen Funktion einer Wahrscheinlichkeitsdichte $w(x)$

$$G(k) = \int_{\mathbb{R}} dx\ w(x) e^{ikx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

auch die durch

$$\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle\langle x^n \rangle\rangle$$

definierten Kumulanten $\langle\langle x^n \rangle\rangle$ eingeführt.
Berechen Sie die Kumulanten bis zur vierten Ordnung als Funktion der Momente $\langle x^n \rangle$!

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Berechnen Sie die charakteristische Funktion für die Binomial- und die Gaussverteilung. Berechnen Sie weiterhin Mittelwert und Varianz für beide Verteilungen

(a) mit Hilfe der charakteristischen Funktion.

(b) mit Hilfe der Definition für die Momente.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

φ ist ein zufälliger Phasenwinkel, dessen W.keitsverteilung im Intervall $[0, 2\pi]$ die Gleichverteilung sein soll. Weiterhin sei

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi.$$

Berechnen Sie die Verbundw.keitsverteilung $p_{xy}(x, y)$, die Randverteilungen $p_x(x)$ und $p_y(y)$ sowie die Kovarianz $\langle\ (x - \langle x \rangle)\ (y - \langle y \rangle)\ \rangle_\varphi$. Sind die beiden Variablen x und y unabhängig?

Abgabetermin: Mittwoch, 1.11.2006 vor Beginn der Vorlesung.

Lösungen

Aufgabe 1
Sei B das Ereignis, dass die gezogene Kugel weiss ist. Weiterhin ist

$$P(A_1) = 2/5 \qquad P(B/A_1) = 2/5$$

$$P(A_2) = 2/5 \qquad P(B/A_2) = 1/5$$

$$P(A_3) = 1/5 \qquad P(B/A_3) = 4/5$$

so dass die gesuchte W.keit $P(B/A_3)$ gemäss der Bayeschen Formel für a posteriori W.keiten gleich

$$P(A_3/B) = \frac{P(B/A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B/A_i)P(A_i)} = \frac{2}{5}$$

ist.
Aufgabe 2

Analog den Momenten $\langle x^n \rangle$, die man aus den Ableitungen der charakteristischen Funktion $G(k)$ nach ik an der Stelle $k = 0$ bekommt

$$\mu_n \equiv \langle x^n \rangle = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(ik)^n} G(k) \mid_{k=0}, \tag{1}$$

erhält man die Kumulanten aus den Ableitungen von $\ln G(k)$ nach ik an der Stelle $k = 0$:

$$\kappa_n \equiv \langle\langle x^n \rangle\rangle = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(ik)^n} \ln G(k) \mid_{k=0} .$$

Insbsondere lassen sich die Kumulanten gemäss

$$\kappa_n = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}(ik)^{n-1}} \frac{1}{G(k)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ik)} G(k) \mid_{k=0}$$

iterativ aus den Momenten berechnen. Für die folgenden Rechnungen setzen wir $d/d(ik)G(k) \equiv G'(k)$, $d^2/d(ik)^2 G(k) \equiv G''(k)$, usw.
Für die erste Kumulante erhalten wir

$$\kappa_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ik)} \ln G(k) \mid_{k=0} = \frac{1}{G(0)} G'(k) \mid_{k=0} = \mu_1 .$$

Hier haben wir $G(0) = 1$ und die Definition der charakteristischen Funktion (1) als momentengenerierende Funktion benutzt. Analog erhält man für die höheren Kumulanten:

$$\begin{aligned}
\kappa_2 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ik)} \left\{ \frac{1}{G(k)} G'(k) \right\} \mid_{k=0} \\
&= -\frac{1}{G^2(0)} [G'(0)]^2 + \frac{1}{G(0)} G''(0) \\
\kappa_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}(ik)^2} \left\{ \frac{1}{G(k)} G'(k) \right\} \mid_{k=0} \\
&= \frac{2}{G^3(0)} [G']^3 - \frac{3}{G^2(0)} [G'] G'' + \frac{1}{G(0)} G'''(0) \\
\kappa_3 &= \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3 .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\kappa_4 &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}(ik)^3}\left\{\frac{1}{G(k)}G'(k)\right\}|_{k=0} \qquad (2)\\
&= -\frac{6}{G^4(0)}[G']^4+\frac{12}{G^3(0)}[G'(0)]^2G''(0)-\frac{3}{G^2(0)}[G''(0)]^2-\frac{4}{G^2(0)}G'(0)G'''(0)+\frac{1}{G(0)}G^4(0)\\
\kappa_4 &= \mu_4-4\mu_1\mu_3-3\mu_2^2+12\mu_1^2\mu_2-6\mu_1^4.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Zunächst zu den charakteristischen Funktionen:

Binomialverteilung

$$
\begin{aligned}
p_n &= \binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n} \qquad (3)\\
G(k) &= \sum_{n=0}^{N}e^{ikn}\binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}\\
&= \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}(pe^{ik})^n(1-p)^{N-n}\\
G(k) &= (pe^{ik}+1-p)^N.
\end{aligned}
$$

Gaussverteilung

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \int_{\mathbb{R}} dx\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\\
G(k) &= \int_{\mathbb{R}} dx\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{ikx}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}
$$

Quadratische Ergänzung liefert

$$
\begin{aligned}
G(k) &= e^{ik\mu}e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}\int_{\mathbb{R}} dx\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{[(x-(\mu+ik\sigma^2)]^2}{2\sigma^2}}\\
G(k) &= e^{ik\mu}e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2}\int_{-\infty-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dy\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},
\end{aligned}
$$

wo wir $y=x-(\mu+ik\sigma^2)$ gesetzt haben, was den Integrationsweg in die komplexe y-Ebene auf eine zur rellen Achse parallele Geraden durch den Punkt $y=-ik\sigma^2$ verschiebt. Da der Integrand $f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$ eine in der gesamten komplexen Ebene holomorphe Funktion ist, gilt der Cauchysche Integralsatz, wonach das Ringintegral einer holomorphen Funktion über einen geschlossenen einfach zusammenhängenden Weg gleich Null ist, insbesondere gilt (siehe Abbildung 1):

$$
\int_1+\int_2+\int_3+\int_4 \equiv \lim_{R\to\infty}\left\{\int_{-R-ik\sigma^2}^{R-ik\sigma^2}+\int_{R-ik\sigma^2}^{R}+\int_{R}^{-R}+\int_{-R}^{-R-ik\sigma^2}\right\}f(y)dy=0, \qquad (4)
$$

sodass der Integrationsweg wieder zurück auf die relle Achse verschoben werden darf, falls die Integrale über die Teilstücke 2 und 4 im Limes $R\to\infty$ verschwinden. Diese lassen sich aber

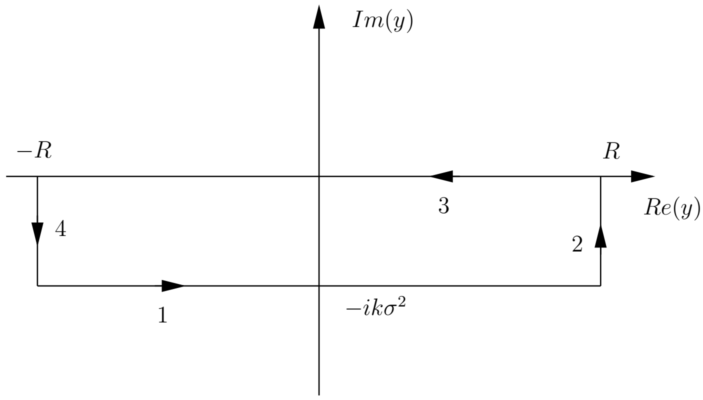

Abbildung 1: Integrationsweg in der komplexen y-Ebene.

einfach abschätzen, z.B. findet man

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \int_{R-ik\sigma^2}^{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy &= \lim_{R\to\infty} \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(R+it)^2}{2\sigma^2}} i\, dt \\
&= \lim_{R\to\infty} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{2iRt-t^2}{2\sigma^2}}\, dt.
\end{aligned}$$

Das Integral ist aber beschränkt, denn

$$\begin{aligned}
0 < \left| \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{i}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{2iRt-t^2}{2\sigma^2}}\, dt \right| &\leq \int_{-k\sigma^2}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\left| ie^{-\frac{i2Rt}{2\sigma^2}} \right|}_{=1} \underbrace{\left| e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \right|}_{\leq \max_{t\in[-k\sigma^2,0]} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \leq C} dt \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-k\sigma^2}^{0} dt = \frac{Ck\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} < \infty,
\end{aligned}$$

sodass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{R-ik\sigma^2}^{R} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, dy = 0$$

Analog lässt sich das Integral über den Weg 4 abschätzen, sodaß wir schliesslich

$$\int_{-\infty-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dy\, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

und damit für die charakteristische Funktion der Gaussverteilung

$$\begin{aligned}
G(k) &= e^{ik\mu} e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \qquad (5) \\
&= e^{ik\mu} e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \sqrt{2\pi\sigma^2} \\
G(k) &= e^{ik\mu} e^{-\frac{k^2}{2}\sigma^2} \text{erhalten.}
\end{aligned}$$

(3a)

Wir berechnen nun Mittelwert und Varianz der beiden Verteilungen mit Hilfe der charakteristischen Funktionen (4) und (6). Für die folgenden Rechnungen setzen wir $ik = s$ und bezeichnen Ableitungen nach s mit $'$.

Binomialverteilung Für die ersten beiden Momente erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= G'(s=0) \\
&= N(pe^s + 1 - p)^{N-1} pe^s|_{s=0} \\
&= Np \\
\mu_2 &= G''(s=0) \\
&= N(N-1)(pe^s + 1 - p)^{N-2}(pe^s)^2|_{s=0} \\
&+ N(pe^s + 1 - p)^{N-1} pe^s|_{s=0} \\
&= N(N-1)p^2 + Np,
\end{aligned}$$

soadss wir für die Varianz

$$\sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2 = N^2p^2 - Np^2 + Np - (Np)^2 = Np(1-p)$$

bekommen.

Gaussverteilung Mit der charakteristischen Funktion für die Gaussverteilung

$$\begin{aligned}
G(k) &= e^{ik\mu} e^{\frac{(ik)^2}{2}\sigma^2} \\
G(ik = s) &= e^{s\mu} e^{\frac{s^2}{2}\sigma^2}
\end{aligned}$$

erhalten wir folgende Ausdrücke für die ersten beiden Momente

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= G'(s=0) \\
&= (\mu + s\sigma^2) e^{s\mu} e^{\frac{s^2}{2}\sigma^2}|_{s=0} \\
&= \mu \\
\mu_2 &= G''(s=0) \\
&= \Big(\mu(\mu + s\sigma^2) + \sigma^2 + s\sigma^2(\mu + s\sigma^2)\Big) e^{s\mu} e^{\frac{s^2}{2}\sigma^2}|_{s=0} \\
&= \mu^2 + \sigma^2,
\end{aligned}$$

sodass die Varianz

$$\langle (\triangle x)^2 \rangle = \mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2$$

wird.

(3b)

Wir kommen nun zur Berechnung von Mittelwert und Varianz mit Hilfe der Definition für die Momente.

Binomialverteilung

$$
\begin{aligned}
\langle n\rangle &= \sum_{n=0}^{N} n\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} \\
&\stackrel{(n=0\to n=1)}{=} \sum_{n=1}^{N} \frac{N!}{(n-1)!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} \\
&\stackrel{n-1\to m}{=} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{N!}{m!(N-(m+1))!}p^{m+1}(1-p)^{N-(m+1)} \\
&= Np\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{m!(N-1-m)!}p^m(1-p)^{(N-1)-m} \\
&= Np,
\end{aligned}
$$

da für die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Bernoulli Experiments mit $N-1$ Versuchen gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{m!(N-1-m)!}p^m(1-p)^{(N-1)-m} &= \sum_{m=0}^{N-1} \binom{N-1}{m}p^m(1-p)^{(N-1)-m} \\
&= (p+1-p)^{N-1} \equiv 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle n^2\rangle &= \sum_{n=0}^{N} n^2\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} n(n-1)\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} + \sum_{n=0}^{N} n\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} n(n-1)\frac{N!}{n!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} + Np \\
&\stackrel{(n=0\to n=2)}{=} \sum_{n=2}^{N} \frac{N!}{(n-2)!(N-n)!}p^n(1-p)^{N-n} + Np \\
&\stackrel{(n-2\to m)}{=} \sum_{m=0}^{N-2} \frac{N!}{m!(N-2-m)!}p^{m+2}(1-p)^{N-2-m} + Np \\
&= N(N-1)p^2\sum_{m=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{m!(N-2-m)!}p^m(1-p)^{N-2-m} + Np \\
&= N(N-1)p^2 + Np,
\end{aligned}
$$

da für die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Bernoulli Experiments mit $N-2$ Versuchen ebenfalls gilt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{m!(N-2-m)!}p^m(1-p)^{(N-2)-m} &= \sum_{m=0}^{N-2} \binom{N-2}{m}p^m(1-p)^{(N-2)-m} \\
&= (p+1-p)^{N-2} \equiv 1.
\end{aligned}
$$

Gaussverteilung

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\overset{y=x-\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \; y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=0} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$\mu_1 = \mu$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\overset{y=x-\mu}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dy \, \frac{y^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} + 2\frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \; y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=0} + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sigma^3 \frac{d}{d\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \; e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=\sqrt{2\pi}\sigma} + \mu^2$$

$$\mu_2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

Aufgabe 4

Zuerst berechnen wir die W.keit $p(x)$:

$$p(x) = \langle \delta(x - \cos\varphi) \rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \; \delta(x - \cos\varphi)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \Big(\frac{1}{|x'(\varphi)|} \delta(\varphi - \arccos x) + \frac{1}{|x'(\varphi)|} \delta(2\pi - \varphi - \arccos x) \Big) \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{|\sin(\varphi)|} \Big(\delta(\varphi - \arccos x) + \delta(2\pi - \varphi - \arccos x) \Big)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big(\frac{1}{\underbrace{|\sin(\arccos x)|}_{\sqrt{1-x^2}}} + \frac{1}{\underbrace{|\sin(2\pi - \arccos x)|}_{|-\sin(\arccos x)|}} \Big)$$

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

wobei wir in (6) benutzt haben, dass der Arkuskosinus im interessierenden Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ zwei Zweige besitzt:

$$x = \cos\varphi \leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \arccos x \\ 2\pi - \varphi = \arccos x \end{cases} \quad |x| \leq 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Eine analoge Rechnung für $p(y)$ liefert $p(y) = 1/(\pi\sqrt{1-y^2})$.

Die Verbundw.keit $p(x,y)$ errechnet sich wiefolgt:

$$\begin{aligned}
p(x,y) &= \langle\delta(x-\cos\varphi)\delta(y-\sin\varphi)\rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(x-\cos\varphi)\delta(y-\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(x-\cos\varphi)\delta(y-\sin\varphi)\underbrace{\int\limits_0^{\infty} d(r^2)\ \delta(r^2-1)}_{=1} \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} rdr\ \delta(r^2-1)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ \delta(x-r\cos\varphi)\delta(y-r\sin\varphi) \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\eta\ \delta(\xi^2+\eta^2-1)\delta(x-\xi)\delta(y+\eta) \\
p(x,y) &= \frac{1}{\pi}\delta(x^2+y^2-1).
\end{aligned}$$

Hier haben wir im letzten Schritt von polar- auf kartesische Koordinaten transformiert und benutzt, dass $r=1$ ist. Zur Berechnung der Kovarianz brauchen wir die Mittelwerte von x und y. Diese ergeben sich zu

$$\langle x\rangle = \int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{\pi\sqrt{1-x^2}} = 0 = \int\limits_{-1}^{1}\frac{ydy}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \langle y\rangle,$$

sodass wir für die Kovarianz zwischen x und y

$$\langle(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle_\varphi = \langle xy\rangle_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\cos\varphi\sin\varphi = 0$$

erhalten. Hieraus folgt, dass sind x und y nicht korrelliert sind. Darüberhinaus sind x und y aber nicht unabhängig, da $p(x,y)\neq p(x)p(y)$. Dieses Ergebnis war in gewissem Sinne zu erwarten, da x und y über eine Koordinatentransformation in Beziehung stehen und deshalb auch nicht unabhängig sein können. Daß x und y nicht korreliert sind, bedeutet, daß beide Variablen im Mittel nicht *linear* abhängig sind, denn Korrelationen geben gerade die *lineare* Abängigkeit zweier Zufallsgrößen an. Dieser Umstand kommt auch nicht ganz unerwartet, da x und y ja über eine nichtlienare Koordinatentransformation verknüpft sind.