

Statistische Physik - Theorie der Wärme
(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 1: Kombinatorik

Aufgabe 1

(6 Punkte)

- Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeit, einen 4er beim Lotto 6 aus 49 mit der Wahrscheinlichkeit, einen 4er beim Lotto 5 aus 35 zu tippen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen 3er mit und ohne Zusatzzahl beim Lotto 6 aus 49. Was folgt daraus im allgemeinen für einen 3er bei 6 aus 49?
- Eine Matrose steht vor n Fahnenmasten und soll darauf r unterscheidbare Fahnen hissen. Wieviele Möglichkeiten hat er dazu? Hierbei gibt es keine Beschränkung hinsichtlich der Anzahl der Fahnen pro Mast.
- Ein Fahrstuhl mit r Passagieren fährt vom Erdgeschoß in den 45. Stock. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß keine 2 Passagiere auf der gleichen Etage aussteigen? Wieviele Passagiere müssen mindestens mitfahren, daß mit einer Wahrscheinlichkeit $p > 1/2$ mindestens 2 Fahrgäste auf der gleichen Etage aussteigen?
- Bridge wird mit 13 Karten (2,3,...,As) in 4 Farben gespielt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß jeder Spieler genau ein As auf der Hand hält?

Aufgabe 2

(2 Punkte)

Aus einem Kartenspiel (36 Karten) werden nacheinander 2 Karten gezogen. Gesucht sind

- die unbedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die 2. Karte ein As ist (ohne daß man weiß, welche Karte zuerst gezogen wurde) und
- die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die 2. Karte ein As ist, wenn zuvor ein As gezogen wurde.

Aufgabe 3

(3 Punkte)

Beweisen Sie, daß für große n Stirlings Formel zur Approximation der Fakultät gilt:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Identität $n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ und entwickeln Sie die Funktion $f(x) = n \ln x - x$ um ihr Maximum (Sattelpunktmethode). Die asymptotische Entwicklung der komplementären Fehlerfunktion $\operatorname{erfc}(x)$ ist:

$$\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{x}.$$

Abgabetermin: Mittwoch, 25.10.2006 vor Beginn der Vorlesung.

Lösungen

Aufgabe 1

- a. Lottospielen entspricht dem Ziehen aus einer Urne, in der es zwei Sorten von ununterscheidbaren Kugeln gibt: die Kugeln mit den gesuchten Nummern und die Übrigen. Da die Reihenfolge für das spätere Endergebnis keine Rolle spielt, gleicht Lottospielen einer ungeordneten Stichprobe ohne Zurücklegen. Bei 6 aus 49 gibt es dementsprechend insgesamt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten, k richtige Kugeln zu ziehen folgt, als $\binom{6}{k} \binom{43}{6-k}$, i.e. k Kugeln aus denen, die die Siegerzahlen ausmachen und $6 - k$ Kugeln aus den Übrigen.

$$6 \text{ aus } 49: P(n = 4) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} \approx 0.097\%,$$

$$5 \text{ aus } 35: P(n = 4) = \frac{\binom{5}{4} \binom{30}{1}}{\binom{35}{5}} \approx 0.046\%.$$

- b. Die Wahrscheinlichkeit, einen 3er mit Zusatzzahl (ZZ) zu ziehen, ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit, einen 3er in der normalen Ziehung zu ziehen, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, die Zusatzzahl aus den verbleibenden Kugeln zu ziehen. Für einen 3er ohne Zusatzzahl folgt die Wahrscheinlichkeit als Produkt aus der Wahrscheinlichkeit, einen 3er in der ersten Ziehung zu erhalten, und der Wahrscheinlichkeit, die falsche Zahl bei der Zusatzzahl zu ziehen.

$$P(n = 3 + ZZ) = \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \frac{\binom{3}{1} \binom{40}{0}}{\binom{43}{1}}, \quad P(n = 3 - ZZ) = \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \frac{\binom{3}{0} \binom{40}{1}}{\binom{43}{1}}$$

Allgemein zerlegt sich das Ereignis eines 3ers im Lotto in einen 3er mit Zusatzzahl und einen 3er ohne Zusatzzahl, also

$$P(n = 3) = P(n = 3 + ZZ) + P(n = 3 - ZZ) = \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}},$$

was in Übereinstimmung mit Aufgabe 1a ist. Hierbei haben wir benutzt, daß

$$\binom{3}{1} \binom{40}{0} + \binom{3}{0} \binom{40}{1} = \binom{43}{1}.$$

Anmerkung: Sei A ein Ereignis und $\{B_i\}_{i \in I}$ eine Menge von anderen Ereignissen derart, daß $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$ und $\sum_i P(B_i) = 1$, dann gilt: $P(A) = \sum_i P(A \cap B_i)$. Desweiteren erhält man für $N, M, n \in \mathbb{N}$ die Identität:

$$\binom{N+M}{n} = \sum_{l=0}^n \binom{N}{l} \binom{M}{n-l}.$$

Die obige Aufgabe ist daher ein Spezialfall dieser allgemeineren Aussage.

- c. Im ersten Schritt hat der Matrose n Masten zur Auswahl. Dieser Mast wird durch die Fahne in 2 Teile geteilt, so daß der Matrose für die zweite Fahne nun $n + 1$ Möglichkeiten besitzt. Entsprechend folgt, daß für die 3. Fahne $n + 2$ mögliche Plätze existieren. Daher hat der Matrose $n(n + 1) \cdots (n + r - 1)$ verschiedene Alternativen zum Hissen der Fahnen.
- d. Da jeder Passagier potentiell auf allen 45 Etagen aussteigen kann, gibt es insgesamt 45^r Ausstiegsszenarien. In dem Fall, daß keine 2 Passagiere zur gleichen Zeit aussteigen, hat der erste Passagier 45 Möglichkeiten, der zweite aber nur noch 44. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle Passagiere auf verschiedenen Etagen dem Lift entkommen $p(r) = 45 \cdot 44 \cdots (45 - r + 1) / 45^r = (45)_r / 45^r$. Tabelle 1 zeigt diese Wahrscheinlichkeit für verschiedene Werte von r . Da die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 2 Fahrgäste zusammen aussteigen, $1 - (45)_r / 45^r$ entspricht, müssen nur 9 Personen mitfahren, damit dies mit einer Wahrscheinlichkeit größer $1/2$ eintritt.

| | | | | | | |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| p | 1 | 0.977778 | 0.934321 | 0.872033 | 0.794519 | 0.706239 |
| | 7 | 8 | 9 | | | |
| | 0.612074 | 0.516862 | 0.424976 | | | |

Tabelle 1: Wahrscheinlichkeit p , daß bei 45 Stockwerken und r Personen im Aufzug keine 2 auf der gleichen Etage aussteigen

- e. Die 52 Karten werden auf 4 Spieler aufgeteilt. Da die Reihenfolge innerhalb der Karten eines Spielers keine Rolle spielt, gibt es insgesamt $52!/(13!)^4$ mögliche Kartenverteilungen. Die 4 Asse können auf $4!$ verschiedene Weisen auf die Spieler ausgeteilt werden (beim ersten As hat man 4 Spieler zur Auswahl, beim zweiten nur noch 3 usw.) Für die restlichen Karten existieren noch $48!/(12!)^4$ Möglichkeiten, da auch hier wieder die Reihenfolge auf der Hand eines jeweiligen Spielers unerheblich ist. Daher ist die Wahrscheinlichkeit p , daß jeder Spieler genau ein As auf der Hand hält

$$p = \frac{24 \cdot 48! \cdot (13!)^4}{52! \cdot (12!)^4} = \frac{24 \cdot 48! \cdot 13^4}{52!} = 0.105.$$

Aufgabe 2

Sei A das Ereignis, daß die 2. Karte ein As ist, und B das Ereignis, daß beim ersten Mal auch schon ein As gezogen wurde. Es gibt insgesamt $36 \cdot 35$ Versuchsausgänge, da die Reihenfolge beachtet werden muss. Darunter befinden sich $4 \cdot 3$ Möglichkeiten, 2 Asse zu ziehen, und $4 \cdot 32$ Möglichkeiten, ein As und irgendeine andere Karte zu erhalten. Damit erhalten wir

a. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \frac{4 \cdot 3}{36 \cdot 35} + \frac{4 \cdot 32}{36 \cdot 35} = \frac{1}{9},$

b. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4 \cdot 3}{36 \cdot 35} / \frac{4}{36} = \frac{3}{35}.$

Das Ergebnis unter b. läßt sich auch so lesen, daß nach dem ersten Zug noch 35 Karten vorhanden sind, unter denen 3 Asse sind.

Aufgabe 3

Die Gammafunktion interpoliert die Fakultät gemäß

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x+n \ln x} dx.$$

Die Funktion $f(x) := n \ln x - x$ besitzt bei $x = n$ ein Maximum. Entwickeln wir f um dieses Maximum und berücksichtigen, daß $f'(x)$ dort verschwindet, so erhalten wir

$$f(x) = n \ln n - n - \frac{1}{2n}(x-n)^2 + \frac{1}{3n^2}(x-n)^3 - \frac{1}{4n^3}(x-n)^4 + \mathcal{O}\left(\frac{(x-n)^5}{n^4}\right).$$

Daraus folgt für die Fakultät

$$n! = n^n e^{-n} \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2n}(x-n)^2 + \frac{1}{3n^2}(x-n)^3 - \frac{1}{4n^3}(x-n)^4 + \dots\right\} dx.$$

Durch die Substitution $y := (x-n)/\sqrt{n}$ geht die obige Gleichung über in

$$\begin{aligned} n! &= n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots\right\} dy \\ &= n^n e^{-n} \sqrt{n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots\right\} dy - \psi(-\sqrt{n}) \right], \end{aligned}$$

mit

$$\psi(-\sqrt{n}) := \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n^2}y^4 \dots \right\} dy.$$

Für $n \gg 1$ entspricht der führende Term in $\psi(-\sqrt{n})$ der komplementären Fehlerfunktion $\operatorname{erfc}(-\sqrt{n})$. Da diese asymptotisch wie $\exp(-n)/\sqrt{n}$ skaliert, führt das Vernachlässigen von $\psi(-\sqrt{n})$ in der obigen Gleichung zu einem exponentiell kleinen Fehler. Somit erhalten wir als Näherung für die Fakultät

$$\begin{aligned} n! &\sim n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots \right\} dy \\ &= n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}y^2 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots \right\} dy \\ &\stackrel{n \gg 1}{\approx} n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2}y^2 \right\} \left[1 + \frac{1}{3\sqrt{n}}y^3 - \frac{1}{4n}y^4 \dots \right] dy \\ &= n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left[1 - \frac{3}{4n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right], \end{aligned}$$

womit die Stirlingsche Formel bewiesen ist.