Statistische Physik - Theorie der Wärme

(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 12: Ferromagnet

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein ferromagnetisches System aus N Spins kann bei tiefen Temperaturen durch die freie Energie

$$F = N\left(\frac{a}{2}m^2 + \frac{b}{4}m^4 - hm\right)$$

modelliert werden. Hierbei ist m die Magnetisierung und h ein externes magnetisches Feld. Bezeichne T_C die kritische Temperatur, dann ist $a(T) = a_0(T - T_C)/T_C$. Des weiteren seien $a_0, b \in \mathbb{R}^+$.

a. Skizzieren Sie $F(m)$ für die drei Fälle $T > T_C$, $T = T_C$ und $T < T_C$ bei $h = 0$.

b. Berechnen Sie $m(T)$ für $h = 0$, indem Sie die freie Energie minimieren.

c. Berechnen Sie die Entropie $S(T)$ und die Wärmekapazität $C_V(T)$ für $h = 0$ und skizieren Sie $C_V(T)$.

d. Berechnen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi = (\partial m/\partial h)_{h=0}$.

e. Diskutieren Sie graphisch die Abhängigkeit der Magnetisierung m vom externen Feld h für die drei Fälle $a < 0$, $a = 0$ und $a > 0$.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

In einer Kette aus N Spins mögen nur die direkt benachbarten Spins miteinander wechselwirken. Ein solches System wird durch den Hamiltonoperator

$$H = -\sum_{i=1}^{N-1} J_i s_i s_{i+1}$$

beschrieben, wobei J_i die platzabhängige Stärke der Wechselwirkung und $s_i = \pm 1$ ist.

a. Berechnen Sie die kanonische Zustandsumme. Beweisen Sie dazu, dass $Z_N = 2\cosh(\beta J_{N-1})Z_{N-1}$ gilt. Werten Sie die Zustandsumme für konstantes J aus, d.h. $J_l = J_k$ für $l \neq k$.

b. Berechnen Sie die freie Energie f, die Entropie s, die spezifische Wärme c_V und die innere Energie u pro Teilchen im thermodynamischen Limes $N \to \infty$ für konstantes J.

c. Zeigen Sie, daß der dritte Hauptsatz erfüllt ist.

d. Die Korrelationsfunktion $G(i,n) := \langle s_i s_{i+n}\rangle$ charakterisiert den Zerfall der Spinkorrelation als Funktion des Abstandes n. Berechnen Sie $G(i,n)$ und zeigen Sie dazu zunächst, daß

$$G(i,n) = \frac{1}{Z_N}\left[\prod_{k=i}^{i+n-1} \frac{\partial}{\partial \beta J_k}\right] Z_N\,.$$

e. Werten Sie die Korrelationsfunktion für konstantes J aus und zeigen Sie, daß G exponentiell abfällt, i.e. $G(i,n) = \exp(-n/\xi)$. Hierbei bezeichnet ξ die Korrelationslänge. Berechnen Sie ξ in führender Ordnung für kleine Temperaturen.

Abgabetermin: Mittwoch, 07.02.2007 vor Beginn der Vorlesung.