Freie Universität Berlin
Fachbereich Physik

WS 2005/2006
7.12.2005

Statistische Physik - Theorie der Wärme
(PD Dr. M. Falcke)

Übungsblatt 8: Einfaches Stern-Modell, Jacobi Determinante

Lösungen

Aufgabe 1
Wegen des statischen Charakters des Problems reduziert sich die Euler-Gleichung auf

$$\nabla p = -\rho \nabla U = 2K\rho\nabla\rho \tag{1}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen wegen der (polytropen) Zustandsgleichung $p(r) = K\rho^2(r)$ folgt. Wegen der Kugelsymmetrie des Problems folgt für die Newtonsche Potentialgleichung

$$\triangle U = \frac{\partial^2}{\partial r^2}U + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}U = 4\pi G\rho(r) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) läßt sich wegen

$$\frac{\partial}{\partial r}U = -2K\frac{\partial}{\partial r}\rho \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}U = -2K\frac{\partial^2}{\partial r^2}\rho \tag{3}$$

folgende Gleichung für ρ ableiten

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\rho + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\rho + \alpha\rho = 0, \quad \alpha \equiv \frac{2\pi G}{K}. \tag{4}$$

Mit der Substitution $x = r\sqrt{\alpha}$ geht diese Gleichung in die (sphärische) Besselsche Gleichung (mit dem Index $n = 0$) über:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\rho + \frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}\rho + \rho = 0,$$

deren allgemeine Lösung

$$\rho(x) = A\frac{\sin x}{x} + B\frac{\cos x}{x}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten A und B ist. Aus der natürlichen Forderung $\rho(x = r\sqrt{\alpha} = 0) < \infty$ erhält man $B \equiv 0$, also

$$\rho(r) = A\frac{\sin(\sqrt{\alpha}r)}{\sqrt{\alpha}r} \quad 0 \le r \le R,$$

wobei der Radius R des Sterns durch das Verschwinden des Druckes $p(R) = K\rho^2(R) \overset{!}{=} 0$ an der Sternoberfläche bestimmt ist. Daraus folgt $\sqrt{\alpha}R \overset{!}{=} \pi$, also

$$R = \sqrt{\frac{\pi K}{2G}}.$$

Hieraus wird ersichtlich, daß der Radius des Sterns (im Gleichgewicht) allein durch die Zustandsgleichung $(K, \Gamma = 2)$ und die Graviation festgelegt ist. Insbesondere läßt sich zeigen, daß der Radius in obigem (nichtrelativistischen) Stern-Modell für $\Gamma \le \frac{6}{5}$ unendlich groß wird, sodaß für solche Zustandsgleichungen keine statischen Sterne mehr existieren.

Die zweite Integrationskonstante A legt die Gesamtmasse M über

$$
\begin{aligned}
M(R) &= 4\pi \int\limits_0^R \rho(r\sqrt{\alpha}) r^2 dr \\
&= 4\pi A \int\limits_0^R r^2 \frac{\sin r\sqrt{\alpha}}{r\sqrt{\alpha}} dr \\
&= \frac{4\pi A}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{\sin\sqrt{\alpha}R}{\alpha} - \frac{R}{\sqrt{\alpha}} \cos\sqrt{\alpha}R \right) \\
&= 4\pi A \frac{R}{\alpha} = \frac{4}{\pi} R^3 A
\end{aligned}
$$

fest. Hier haben wir in den letzten beiden Zeilen $\sqrt{\alpha}R = \pi$ benutzt.

Aufgabe 2

a. Die Determinante einer $N \times N$ Matrix läßt sich mit Hilfe des N-dimensionalen ϵ-Tensors

$$\varepsilon_{12\ldots N} = 1, \quad \varepsilon_{ij\ldots k} = \begin{cases} 1, \text{ falls } (i,j,\ldots,k) \in P_+(1,2,\ldots N) \text{ (gerade Permutation)} \\ -1, \text{ falls } (i,j,\ldots,k) \in P_-(1,2,\ldots N) \text{ (ungerade Permutation)} \end{cases}$$

schreiben als

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i,j,\ldots,k=1}^{N} \varepsilon_{ij\ldots k} A_{1i} A_{2j} \ldots A_{Nk} \\ &= \frac{1}{N!} \sum_{i,j,\ldots,k=1}^{N} \sum_{l,m,\ldots,p=1}^{N} \varepsilon_{lm\ldots p}\, \varepsilon_{ij\ldots k} A_{li} A_{mj} \ldots A_{pk} \\ &= \frac{1}{N!} \varepsilon_{lm\ldots p}\, \varepsilon_{ij\ldots k} A_{li} A_{mj} \ldots A_{pk} \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Einsteinsche Summenkonvention benutzt haben, wonach über doppelt auftretende Indizes automatisch zu summieren ist. Insbesondere erhält man für eine zweidimensionale Determinante

$$\begin{aligned} |A| &= \varepsilon_{ij} A_{1i} A_{2j} = \varepsilon_{12} A_{11} A_{22} + \varepsilon_{21} A_{12} A_{21} \\ &= A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}. \end{aligned}$$

Für die folgende Rechnung setzen wir: $(f,g) = (f_1, f_2)$, $(u,v) = (u_1, u_2)$, $(x,y) = (x_1, x_2)$. Somit erhält man für die Jacobi Determinante

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} &= \varepsilon_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ &= \varepsilon_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{lk} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ &= \varepsilon_{lk} \frac{\partial f_1}{\partial u_l} \frac{\partial f_2}{\partial u_k} \varepsilon_{ij} \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u_1,u_2)} \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(x_1,x_2)}. \end{aligned}$$

Beim Übergang von Zeile 3 zu Zeile 4 haben wir benutzt, daß

$$\varepsilon_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \frac{\partial u_l}{\partial x_1} \frac{\partial u_k}{\partial x_2} - \frac{\partial u_l}{\partial x_2} \frac{\partial u_k}{\partial x_1}$$

aufgrund der Antisymmetrie in i und j für $k = l$ verschwindet und deshalb proportional zum ε-Tensor ist.

b. Unter Benutzung von (a) folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_v &= \frac{\partial(f,v)}{\partial(u,v)} \\ &= \frac{\partial(f,v)}{\partial(f,u)}\frac{\partial(f,u)}{\partial(u,v)} \\ &= -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_u}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}.\end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, daß sich das Vorzeichen der Jacobi Determinante beim Vertauschen zweier Spalten umkehrt sowie die Beziehung zwischen der Ableitung einer Funktion ($v(u)$) und ihrer Umkehrung ($u(v)$):

$$\frac{\partial(f,u)}{\partial(u,v)} = -\frac{\partial(f,u)}{\partial(v,u)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(f,v)}{\partial(f,u)} = \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_f = \frac{1}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_f}.$$

c. Das Differential der freien Energie (bei konstanter Teilchenzahl) lautet

$$dF = -SdT - pdV.$$

Daraus folgt

$$-S = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

$$-p = \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V. \tag{5}$$

Unter Benutzung von (a) erhält man somit für die gesuchte Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned}\frac{\partial(T,S)}{\partial(P,V)} &= \frac{\partial(T,S)}{\partial(T,V)}\frac{\partial(T,V)}{\partial(P,V)} \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \\ &= \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V} \overset{(5)}{=} 1.\end{aligned}$$